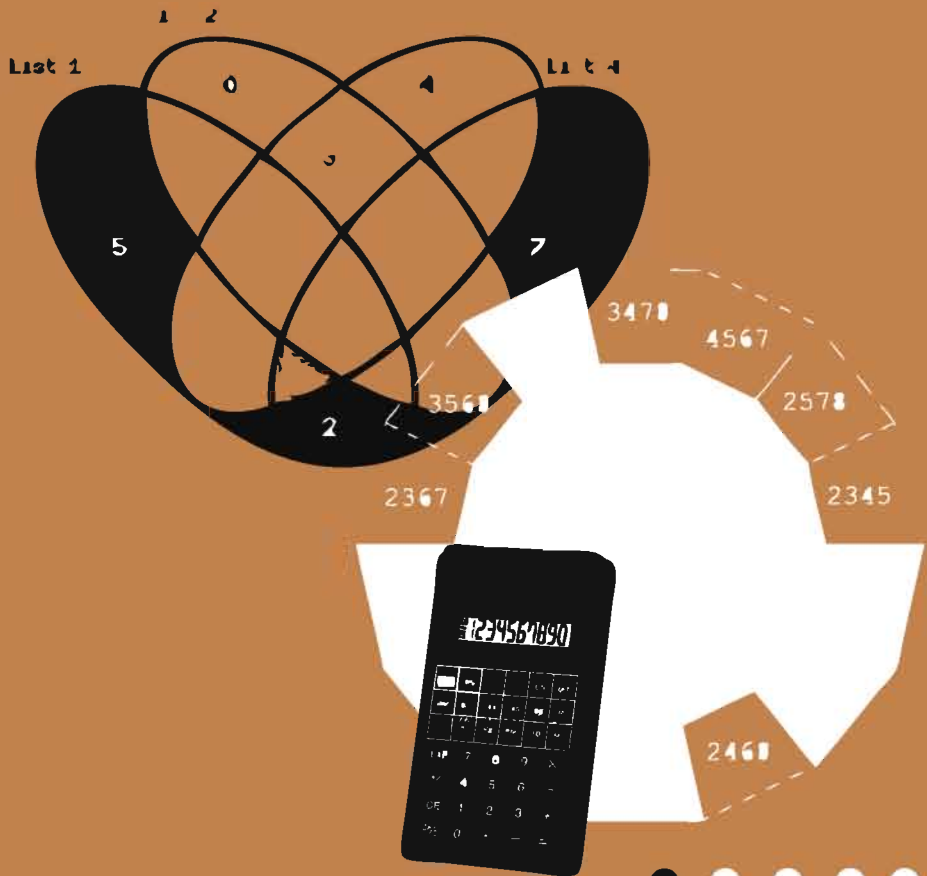
মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত
ব্যবহারিক



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০০৯ শিক্ষাবর্ষ
থেকে নবম-দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত

ব্যবহারিক

নবম-দশম শ্রেণী

রচনা
হারুনুর রশীদ

সম্পাদনায়
আ.ফ.ম. খোদাদাদ খান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত

কেবল মাত্র ২০০৮ সালে ২৫.০০০ (পঁচিশ হাজার) কপি পুস্তক
মুদ্রণ ও বিক্রির জন্য নিযুক্ত পরিবেশক
বিজ্ঞপ্তি নং- ২৮৯ তাং ১১/১০/০৭ এবং
বিজ্ঞপ্তি নং- ৩০৩ তারিখ ঃ ০১/১১/০৭
বরাদ্দ পত্র নং বিত-৬৯৬/০৭/৭৭৯ তাং ০২/১২/০৭

ইউনাইটেড প্রিন্টিং প্রেস
৬৩ ঋষি কেশ দাস রোড, ঢাকা
প্রথম মুদ্রণ : এপ্রিল, ১৯৯৬
সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ : নভেম্বর, ২০০০

পুনর্মুদ্রণ : **ডিসেম্বর, ২০০৬**
পুনর্মুদ্রণ : ডিসেম্বর, ২০০৭ইং

কম্পিউটার কম্পোজ
লেজার স্ক্যান লিঃ
১৫/২, তোপখানা রোড, ঢাকা-১০০০
ফোন : ৯৫৬২৮৬৫, ৯৫৬৭৬৯৮

প্রচ্ছদ
লেজার স্ক্যান লিমিটেড, ঢাকা

চিত্রাঙ্কন
কাজী সাইফুদ্দীন আব্বাস
সুশান্ত কুমার অধিকারী

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

মূল্য : টা ঃ ১৭.৭০ (সতের টাকা সত্তর পয়সা মাত্র)

মুদ্রণে : অঙ্কুর আইসিটি ডেভেলপমেন্ট ফাউন্ডেশন (ওয়েব বিন্যাস)

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এই পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষাবিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায়, পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক–শিক্ষার্থীর নিকট আরো গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরো ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায়–শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যে–কোনো বিষয়কে বিচার–বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

গণিত শিক্ষাকে যুগোপযোগী করার অভিপ্রায়ে এবং আধুনিক শিখনচাহিদা অনুযায়ী গণিত শিক্ষার মান আন্তর্জাতিক তুল্যমানে উন্নীত করার লক্ষ্যে মাধ্যমিক স্তরের উচ্চতর ব্যবহারিক গণিত বইটিতে প্রয়োজনীয় সংশোধনীসহ পরিমার্জন করা হয়েছে। প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সহজ করার জন্য উচ্চতর ব্যবহারিক গণিতের ভিত্তি অন্বয় ও বিপরীত অন্বয়, ফাংশন এবং পরিসংখ্যানের প্রাথমিক ধারণাসমূহ সহজভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে। গণিতের নিজস্ব বৈশিষ্ট্য অক্ষুণ্ন রেখে শিক্ষার্থীদের মাঝে গণিতমনস্কতা সৃষ্টি করা অপরিহার্য। এদিকে বিশেষ লক্ষ রেখে নতুন ধ্যানধারণা সহজভাবে এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রে অর্ধবাস্তব পর্যায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা নিজ প্রচেষ্টায় বা শিক্ষকের ন্যূনতম সহায়তায় বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে সক্ষম হবে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যেকোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসংগত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে স্বাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এ পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মো: মোস্তফা কামালউদ্দিন

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

সূচিপত্র

ব্যবহারিক গণিত
সাধারণ নির্দেশাবলি

১। ভূমিকা

গণিতের তত্ত্বীয় জ্ঞান ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগের পদ্ধতি বা কৌশল শেখানোর জন্যই ব্যবহারিক গণিতের প্রবর্তন করা হয়েছে। ব্যবহারিক ক্লাসে দক্ষতার সঙ্গে কার্য সম্পাদন এবং ব্যবহারিক কাজের বিবরণ যথাযথভাবে সংরক্ষণ করতে পারার জন্য নিম্নলিখিত বিষয়গুলোর প্রতি শিক্ষার্থীদের মনোযোগী হওয়া প্রয়োজন।

১। ব্যবহারিক ক্লাসে যে কাজটি করতে হবে তার তত্ত্ব, কাজের ধারা এবং প্রয়োজনীয় উপকরণ সম্পর্কে আগেই জেনে নিতে হবে।

২। কাজ শুরু করার আগে প্রয়োজনীয় উপকরণ সব সংগ্রহ করা হয়েছে কি না সে সম্পর্কে নিশ্চিত হতে হবে।

৩। ব্যবহারিক কাজের বর্ণনার জন্য কোনো ছকের প্রয়োজন হলে তা কাজ আরম্ভ করার আগেই তৈরি করে নিতে হবে।

৪। ব্যবহারিক কাজের বিবরণাদি ধারাবাহিকভাবে সংক্ষরণ করার জন্য একটি খসড়া খাতা ও একটি পরিচ্ছন্ন ব্যবহারিক খাতা তৈরি করতে হবে।

২। খসড়া খাতা সংক্ষরণ পদ্ধতি

পরিচ্ছন্ন ব্যবহারিক খাতা লেখায় সহায়তার জন্য একটি খসড়া তৈরি করা প্রয়োজন। ঐ খাতায় ব্যবহারিক কাজের সময় ঐ নির্দিষ্ট কাজটি সম্পর্কে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো লিপিবন্ধ করা দরকার ঃ

১। কাজের ক্রমিক নম্বর

২। কাজের তারিখ

৩। কাজের নাম

৪। তত্ত্ব

৫। প্রয়োজনীয় উপকরণের তালিকা।

৬। ছক (যদি থাকে)

৭। হিসাব (যদি থাকে)

৮। ফলাফল।

৩। ব্যবহারিক খাতা সংক্ষরণ পদ্ধতি

ব্যবহারিক খাতায় ব্যবহারিক ক্লাসের সমস্ত কাজের বিববণ লিপিবন্ধ করতে হয় এবং মূলায়নের জন্য উপস্থাপন করতে হয়। খাতায় নিম্নোক্ত বিষয়গুলো উল্লেখ করা প্রয়োজন।

১। ব্যবহারিক কাজের ক্রমিক নম্বর ও কাজের তারিখ ঃ সাধারণ বামদিকে উপরে ক্রমিক নম্বর ও ডানদিকে উপরে তারিখ লেখা।

২। কাজের নাম।

৩। তত্ত্ব এর সঙ্গে কোন সূত্র বা সমীকরণ থাকলে সেটা উল্লেখ করতে হবে।

৪। প্রয়োজনীয় যন্ত্রপাতি ও উপকরণ।

৫। কাজের পদ্ধতি : প্রদত্ত উপাত্ত থেকে ফলাফল নির্ণয় পযর্ন্ত ধাপে ধাপে যে কার্যপ্রণালী অনুসরণ করা হয় সেগুলো ধারাবাহিকভাবে লিখতে হবে। কাজের বর্ণনায় কোন চিত্রের প্রয়োজন হলে তা বাম পাশের পৃষ্ঠায় আঁকতে হবে।

৬। ছক (যদি প্রয়োজন হয়) : প্রদত্ত ও নির্ণীত উপাত্ত শিরোনামসহ পৃথক কলামে লিপিবদ্ধ করতে হবে।

৭। হিসাব : প্রদত্ত উপাত্ত থেকে সূত্র প্রয়োগ করে ফল নির্ণয়ে হিসাব প্রক্রিয়া বামপাশে পৃষ্ঠায় দেখাতে হবে। তবে সরাসরি ফল সংকলন করা সম্ভব হলে কর্যপদ্ধতির পরই ফল সংকলন করা যেতে পারে।

৮। ফলাফল : ছকের নিচে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে নির্ণীত ফলাফল এককসহ (যদি থাকে) লিখতে হবে।

৯। সতর্কতা : সঠিক ফলাফল নির্ণয়ের জন্য যে সকল সতর্কতা অবলম্বন করতে হয়েছে খাতায় সেগুলো উল্লেখ করতে হবে।

১০। মন্তব্য : ব্যবহারিক কাজটি সম্পর্কে কোন মন্তব্য থাকলে তা এ অংশে উল্লেখ করতে হবে।

৪। বিশেষ নির্দেশাবলি

(ক) ক্যালকুলেটর ব্যবহার

ব্যবহারিক কাজে ক্যালকুলেটর ব্যবহারের ব্যবস্থা রাখা হয়েছে। এজন্য বিদ্যালয় থেকে সরবরাহকৃত অথবা শিক্ষার্থীর সংগ্রহকৃত সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর (Scientific Calculator) ব্যবহার করতে হবে। সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর অনেক মডেলের আছে। শিক্ষার্থী যে মডেলের ক্যালকুলেটর ব্যবহার করতে চায় তার ব্যবহার পদ্ধতি ভালভাবে শিখে নিতে হবে। উপাত্ত নির্ণয় ক্যালকুলেটরের কোন কোন বোতাম ব্যবহার করা হয়েছে তা খাতায় লিপিবদ্ধ করবে। অনুমোদিত ক্যালকুলেটর ব্যতীত অন্য কোনো ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যাবে না।

(খ) গ্রাফ বা লেখচিত্র অঙ্কন

(i) লেখচিত্র আঁকার সময় একটি সরু করে কাটা পেন্সিল ও একটি স্কেল ব্যবহার করতে হয়। দাগগুলো যাতে সরু এবং সোজা ও স্পষ্ট হয় সেদিকে সতর্ক থাকতে হবে। বৃত্তলেখ আঁকার জন্য একটি পেন্সিল ও কম্পাস দরকার হয়।

(ii) সাধারণত লেখচিত্র আঁকতে দুইটি চলকের মান ব্যবহার করা হয়। স্বাধীন চলকের মান X অক্ষ বরাবর এবং অধীন চলকের মান Y অক্ষ বরাবর পরিমাপ করা হয়।

(iii) প্রদত্ত উপাত্তের মধ্যে স্বাধীন ও অধীন চলকের ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মান পর্যবেক্ষণ করে প্রদত্ত গ্রাফ কাগজের আকারের সঙ্গে সঙ্গতি রেখে একক ঠিক করে নিতে হয় (যেমন, পাঁচ একক অথবা পাঁচ বর্গ সমান এক একক)। চলকের মান ভগ্নাংশ হলে সর্বোচ্চ হরের সমান সংখ্যক বর্গকে একক ধরলে গণনায় সুবিধা হয় এবং বিন্দুপাতনে সুবিধা হয়। তবে সে ক্ষেত্রে গ্রাফ কাগজের আকারে প্রয়োজনীয় জায়গা সংকুলান হবে কি না সেটাও প্রথমে হিসাব করে দেখতে হয়।

(iv) পরিসংখ্যানের ঘটন-সংখ্যা/বহুভুজ বা (বার-ডায়াগ্রাম) বা যে কোন লেখচিত্র আঁকার সময় কোন অক্ষ বরাবর কোন চলক পরিমাপ করা হচ্ছে সেটা লেখাচিত্রের পাশেই উল্লেখ করতে হয়।

(v) বৃত্তলেখ আঁকার সময় বিভিন্ন পরিমাপের কোণ আঁকতে হয়। এজন্য একটি অর্ধবৃত্তাকার চাঁদা (Protractor) ব্যবহার করতে হয়।

প্রথম অধ্যায়

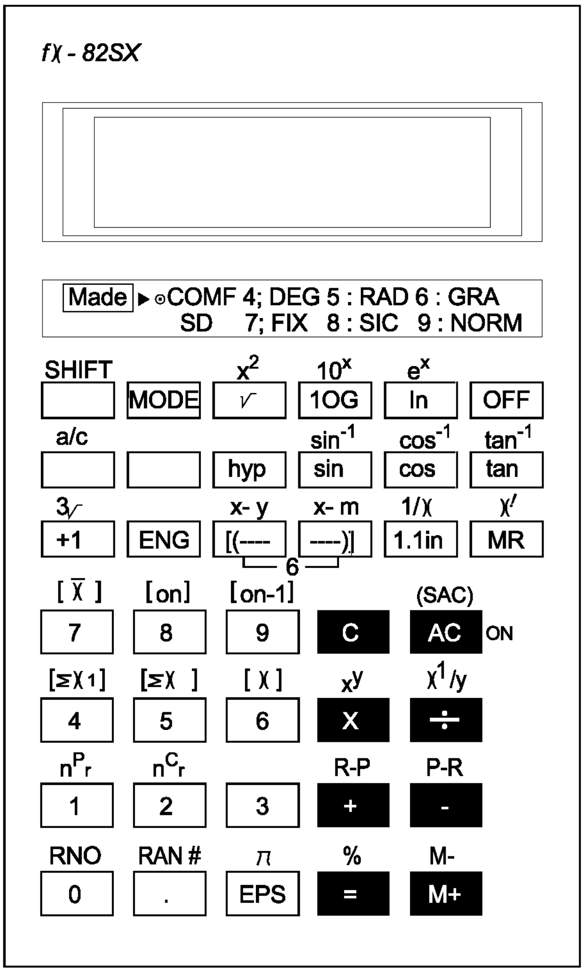
ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

১.১। ভূমিকা

ক্যালকুলেটর একটি আধুনিক হিসাবযন্ত্র। ক্যালকুলেটরের সাহায্যে অনেক জটিল গাণিতিক অপারেশন (Operation) সহজেই সম্পাদন করা যায়। বিভিন্ন প্রকারের ক্যালকুলেটরের মধ্যে সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর (Scientific Calculator) এর বর্ণনা ও ব্যবহার সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হল।

১.২। ক্যালকুলেটরের বর্ণনা

সাধারণত বহনযোগ্য ক্যালকুলেটর তারই ভিতর অবস্থিত ব্যাটারীর সাহায্যে চলে। আজকাল সৌর শক্তি চালিত ব্যাটারীযুক্ত ক্যালকুলেটরও পাওয়া যায়। কিছু কিছু অপেক্ষাকৃত বৃহদাকার ক্যালকুলেটর বিদ্যুতের সাহায্যেও চলে।



চিত্র -১

সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর সম্মুখপৃষ্ঠ তিনটি অংশে বিভক্ত। উপরের অংশে অবস্থিত ডিসপ্লে প্লেট (Display plate) এ বিভিন্ন অপারেশনের পর কাঙ্খিত সংখ্যা দৃশ্যমান হয়। মধ্যের অংশ গাণিতিক জটিল অপারেশনগুলোর সংকেত সম্বলিত কয়েকটি বোতাম আছে। নিচের অংশে ০ থেকে ৯ পর্যন্ত অঙ্কের এবং C, AC, +, -, x, ÷, = ইত্যাদি সংকেতের বোতাম আছে। ক্যালকুলেটরের ব্যাটারীর শক্তি ঠিক থাকলে কাজ আরম্ভ করার আগে AC চিহ্নিত বোতাম টিপে ON করতে হয়। তখন ডিসপ্লে প্লেটে 0 দেখা যাবে। কাজ শেষ করার পর OFF চিহ্নিত বোতাম টিপলেই ব্যাটারীর সংযোগ ছিন্ন হবে। কিছু কিছু মডেলের ক্যালকুলেটর অব্যবহৃত অবস্থায় কিছুক্ষণ রেখে দিলে আপনা থেকেই ব্যাটারীর সংযোগ ছিন্ন হয়।

১.৩। অপারেশন পদ্ধতি

বিভিন্ন ফল নির্ণয়ের জন্য ক্যালকুলেটর ভিন্ন ভিন্ন অপারেশনের ব্যবস্থা রয়েছে। এ জন্য অঙ্ক (Digit), . (দশমিক চিহ্ন) এবং যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ এর জন্য চিহ্নিত বোতামগুলো টিপতে হবে। প্রয়োজনে মাঝের অংশে অবস্থিত ফাংশন চিহ্নিত (sin, log, x^y, e^x ইত্যাদি) বোতামগুলো ব্যবহার করা যাবে। প্রয়োজনীয় অপারেশনগুলো নিম্নোক্ত উদাহরণগুলো মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা হয়েছে অপারেশন চিহ্নগুলো আয়তাকার বক্স করে দেখানো হয়েছে। এজন্য CASIO fx 100B মডেলের সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা হয়েছে। শিক্ষার্থীরা তাদের সংগ্রহকৃত মডেলের সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করবে।

দ্রষ্টব্য ঃ ১। কোন কোন ক্যালকুলেটরে Shift বলে কোন বোতাম নাই। এরূপ ক্যালকুলেটরের ক্ষেত্রে Shift এর স্থলে INV ব্যবহার করতে হবে। তাই পরবর্তী উদাহরণে প্রযোজ্য ক্ষেত্রে Shift / INV বোতাম দেখানো হয়েছে।

২। প্রত্যেক ক্যালকুলেটরের ধারণ ক্ষমতা সীমিত (এই পুস্তকে ব্যবহৃত ক্যালকুলেটরের ক্ষেত্রে দশ ঘর)। সেজন্য কোন অপারেশনের ফল ধারণ ক্ষমতা অতিরিক্ত হলে তা কর্তিত অবস্থায়ই সংরক্ষিত ও প্রদর্শিত হয়। সে জন্য ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে প্রাপ্ত অধিকাংশ ফলই প্রকৃত ফলের আসন্ন মান।

৩। বিভিন্ন মডেলের ক্যালকুলেটর ব্যবহার করলে অথবা অপারেশনের বিভিন্ন পদ্ধতি অনুসরণ করলে একই সমস্যার ফলে কিছুটা পার্থক্য হতে পারে।

উদাহরণ ঃ প্রতি ক্ষেত্রে মেশিন-নির্ভুল উত্তর দেখানো হয়েছে।

(i) যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ

$23{\cdot}9 \times 17{\cdot}5 \times 13{\cdot}6 \div 3{\cdot}96 + 7{\cdot}00931$

23 [.] 9 [x] 17 [.] 5 [x] 13 [.] 6 [÷] 3 [.] 96 [+] 7 [.] 00931 = 1443.423451

(ii) শক্তি (Power)

(a) $(21)^6$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি

21 [x^y] 6 [+/-] [=] 85766121

(b) $(21)^{-6}$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি

21 [x^y] 6 [+/-] [=] 1.165961557 $^{-08}$

যে সংখ্যাটি ডিসপ্লে প্লেটে দৃশ্যমান হবে সেটাই উল্লেখ করা হল। ডান পাশে একটু আলাদা ভাবে প্রদর্শিত 08 সংখ্যাটির অর্থ বাম পাশে প্রদর্শিত সংখ্যাটিকে 10^{-8} দিয়ে গুণ করতে হবে।

অর্থাৎ $(21)^{-6} = 1.165961557 \times 10^{-8} = .00000001165961557$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

21 $\boxed{x^y}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{SHIFT / INV}}$ $\boxed{1/x}$ $= 1.165961557^{-8}$ দ্বারাও উত্তর পাওয়া যায়।

(iii) মূল (Root)

$\sqrt[7]{129} = (129)^{\frac{1}{7}}$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

129 $\boxed{\text{SHIFT / INV}}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{7}$ $= 2.002224705$

$(129)^{\frac{1}{7}}$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

129 $\boxed{\text{SHIFT / INV}}$ $\boxed{x^y}$ 7 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ 0.499444441

(iv) সাধারণ লগারিদম (Common logarithm)

$\log_{10}99.231 = \log 99.231$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

99 $\boxed{.}$ 231 log = 1.996647368

$\log_{10}x = 2.30103$ হলে x এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

2 $\boxed{.}$ 30103 $\boxed{\text{SHIFT / INV}}$ $\boxed{\log}$ = 200.000002

(v) স্বাভাবিক বা নেপেরিয়ান লগারিদম (In) (Natural or Napirian logarithm)

$\log_e 5{\cdot}23$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

$\log_e 5{\cdot}23 = \text{In}\ 5.23$

5 $\boxed{.}$ 23 $\boxed{\text{In}}$ $\boxed{=}$ 1.654411278

$\log_e x = 2{\cdot}30103$ হলে x এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

2 $\boxed{.}$ 30103 $\boxed{\text{SHIFT / INV}}$ $\boxed{\text{In}}$ $= 9{\cdot}984461155$

(vi) π এর মান নির্ণয়

$\boxed{\text{EXP}}$ বোতাম টিপলেই π এর আসন্ন মান 3.141592654 পাওয়া যাবে। উল্লেখ্য যে, π একটি অমূলদ সংখ্যা। প্রদর্শিত সংখ্যাটি π এর মেশিন-নির্ভুল আসন্ন মান মাত্র।

(vii) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত কাজে প্রথম প্রয়োজন অনুসারে ডিগ্রি অথবা রেডিয়ান ধরন (MODE) নির্ধারণ করে নিতে হবে। এজন্য বিভিন্ন ক্যালকুলেটরে বিভিন্ন পদ্ধতি ব্যবহার করতে হয়। আমাদের ব্যবহৃত CASIO COLLEGE fx 100B ক্যালকুলেটরে [MODE] [4] বোতাম টিপলে ডিগ্রি ধরন এবং [MODE] [5] বোতাম টিপলে রেডিয়ান ধরন চালু হবে। (পরবর্তী কাজে এভাবেই MODE পরিবর্তন নির্দেশ করা হবে) ডিসপ্লে প্লেটে প্রয়োজনীয় ধরণ নির্দেশিত থাকলে MODE বোতাম ব্যবহার করতে হবে না।

$\sin 51^0 35' 41''$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

ডিসপ্লে প্লেটে RAD প্রদর্শিত হলে

[MODE] [4] 51 [·' "] 35 [·' "] 41 [·' "] sin = 0·783636237

$\sin x = \cdot 3571$ এর হলে ডিগ্রি এককে x এর মুখ্যমান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

[MODE] [4] · 3571 [SHIFT / INV] [$\sin^{-1}$] [=] 20·92220354 (যার অর্থ $20{\cdot}92220354^0$)

[SHIFT / INV] [·' "] $20^0\ 55^0\ 19{\cdot}93$ (যার অর্থ $20^0\ 55'\ 19{\cdot}93''$)

sin .3333)(এর মান নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

ডিসপ্লে প্লেটে DEG প্রদর্শিত হলে

[MODE] [5] [.] 3333 [x] EXP [=] [sin] = 0·865973039

(viii) স্মৃতিতে রাখা এবং প্রয়োজনে পুনরায় ব্যবহার করা

কোন সংখ্যা ক্যালকুলেটরের স্মৃতি (memory) তে ধরে রাখা যায় এবং প্রয়োজনমত পুনরায় ডিসপ্লে প্লেটে প্রদর্শন করা যায়। অবশ্য ক্যালকুলেটর বন্ধ করে দিলে স্মৃতি নষ্ট হয়ে যায়। ডিসপ্লে প্লেটে প্রদর্শিত কোন সংখ্যাকে স্মৃতিতে ধরে রাখতে হলে [Min] (Memory in) বোতাম টিপতে হয়। স্মৃতিতে রাখা কোন সংখ্যাকে ডিসপ্লে প্লেটে আনতে হলে [MR] (Memory recall) বোতামটি টিপতে হয়।

[.] 78363627 [Min]

[MR] [=] .78363627

সমস্যা নং ১.১	তারিখ ঃ

সমস্যা ঃ $\dfrac{(3.14)^3 \times (981)^2 \times \sqrt[3]{31362}}{(.002)^5 \times (2926)^2 \times (.10)^3}$ এর আসন্ন মান পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

কার্য পদ্ধতি ঃ (নিচে তিন ভাবে সমাধান করার পদ্ধতি বর্ণনা করা হল)

প্রথম পদ্ধতি ঃ

১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে লবের আসন্ন মান নির্ণয় করি এবং খাতায় লিপিবন্ধ করি।

২। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে হরের আসন্ন মান নির্ণয় করি এবং খাতায় লিপিবন্ধ করি।

৩। লবের আসন্ন মানকে হরের আসন্ন মান দিয়ে ভাগ্র করি এবং খাতায় লিপিবন্ধ করি।

ফল সংকলন ঃ

লবের মান নির্ণয় ঃ

3 [·] 14 [x^y] 3 [x] 981 [x^y] 2 x 313 [·] 62 [INV] [x^y] 3 [=] 71151816.95

হরের মান নির্ণয় ঃ

[·] 002 [x^y] 5 [x] 2926 [x^y] 2 [x] [·] 01 [x^y] 3 [=] 2.73967232 $^{-13}$

প্রদত্ত রাশির মান $= \dfrac{71151816.952}{2.73967232 \times 10^{-13}}$

71151816 [·] 95 [÷] 2 [·] 73967232 [EXP] 13 [+/-] [=] 2.59709223^{20}

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির মান $= 2.5971 \times 10^{20}$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে হরের মান নির্ণয় করি এবং তা ক্যালকুলেটরের স্মৃতিতে [Min] টিপে ধরে রাখি।

২। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে লবের আসন্ন মান নির্ণয় করি।

৩। লবের আসন্ন মানকে [Min] এ ধরে রাখা হরের আসন্ন মান দিয়ে ভাগ করে চূড়ান্ত ফল নির্ণয় করি।

ফল সংকলন ঃ

হরের মান নির্ণয় এবং স্মৃতিতে সংরক্ষণ ঃ

$\boxed{.}\,002\boxed{x^y}5\boxed{x}2926\boxed{x^y}2\boxed{x}\boxed{.}01\boxed{x^y}3\boxed{=}2.73967232^{-13}\boxed{\text{Min}}$

লবের মান নির্ণয় এবং স্মৃতিতে সংরক্ষিত হর দ্বারা ভাগ করা ঃ

$3\boxed{.}14\boxed{x^y}3\boxed{x}981\boxed{x^y}2\boxed{x}13\boxed{\cdot}62\boxed{\text{INV}}\boxed{x^y}3\boxed{=}\ 71151816.95$

$\boxed{\div}\boxed{\text{MR}}\boxed{=}\ 2.5970922320$

∴ প্রদত্ত রাশির মান = 2.5971×10^{20}

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নের পদ্ধতিতে প্রদত্ত রাশির মান সরাসরি নির্ণয় করি।

ফল সংকলন ঃ

$3\boxed{.}14\boxed{x^y}3\boxed{x}981\boxed{x^y}2\boxed{x}13\boxed{\cdot}62\boxed{\text{INV/SHIFT}}\boxed{x^y}3\boxed{\div}\boxed{\cdot}02\boxed{x^y}5\boxed{\div}2926$

$\boxed{x^y}\ 2\boxed{\div}.\boxed{01}\boxed{x^y}\ 3\boxed{=}\ 2.5970922320$

প্রদত্ত রাশির আসন্ন মান = 2.5971×10^{20}

সমস্যা নং ১.২	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করতে হবে ঃ

(ক) $\dfrac{1+\sqrt[3]{0.072}}{1-\sqrt[3]{0.072}}$ **(খ)** $\left[\dfrac{(0.32)^8 \times (625)^4}{(0.00432)^2 \times (0.3125)^3 \times 25}\right]^{\frac{1}{5}} - \log_{10} 319.4727$

সমস্যা নং ১.৩	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করতে হবে ঃ

(ক) $\dfrac{1+\sqrt[3]{0.0075}}{1-\sqrt[3]{0.0075}}$ **(খ)** $\log_{10}\{(2.7)3 \times (.81)^{\frac{4}{5}} \div (90)^{\frac{4}{5}}\}$

সমস্যা নং ১.৪	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করতে হবে ঃ

(ক) $\dfrac{(1.31)^5+1}{(1.31)^5-1}$ **(খ)** $\sqrt[7]{\dfrac{(.0081)^3 \times (312.5)^2}{(.0125)^5}} + \dfrac{\sin 49^0 + 4136}{\tan 32^0\, 47'}$

সমস্যা নং ১.৫	**তারিখ :**

সমস্যা : (ক) $56^0 9' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে।

(খ) 0.7456)(কে ডিগ্রি, মিনিট, সেকেন্ডে প্রকাশ করতে হবে।

(গ) মান নির্ণয় করতে হবে ঃ $\sin 47^0 52'$

(ঘ) x এর মান ডিগ্রি ও রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে, যখন x সূক্ষ্মকোণ।

(i) $\sin x = 0.3241$ (ii) $\tan x = 2.4583$ (iii) $\cos x = 0.7645$.

সমস্যা নং ১.৬	**তারিখ :**

সমস্যা : (ক) $26^0 32' 24''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে।

(খ) 0.1926)(কে ডিগ্রি, মিনিট, সেকেন্ডে প্রকাশ করতে হবে।

(গ) মান নির্ণয় করতে হবে ঃ $\cos 44^0 32'$

(ঘ) x এর মান ডিগ্রি ও রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে, যখন x সূক্ষ্মকোণ।

(i) $\sin x = 0.7$ (ii) $\tan x = 2\cos x$ (iii) $\cos x = 0.6$.

সমস্যা নং ১.৭	**তারিখ :**

সমস্যা : (ক) $36^0 26' 28''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে।

(খ) 0.3723)(কে ডিগ্রি, মিনিট, সেকেন্ডে প্রকাশ করতে হবে।

(গ) মান নির্ণয় করতে হবে ঃ $\tan 71^0 38'$

(ঘ) x এর মুখ্যমান ডিগ্রি ও রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে ঃ

(i) $\tan x = 0.4$ (ii) $\cot x = 2.1$ (iii) $\sec x = 1.8$.

সমস্যা নং ১.৮	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ $\left[\dfrac{(0.32)^8 \times (625)^4}{(0.00432)^2 \times (0.3125)^3 \times 25}\right]^{\frac{1}{5}} - \log_{10} 319.4727$ এর আসন্ন মান পাঁচ সার্থক অঙ্ক পযন্ত নির্ণয়।

তত্ত্ব ঃ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে জটিল গাণিতিক হিসাব আনায়াসে সম্পাদন করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ

১। একটি সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর

২। খাতা

৩। কলম ইত্যাদি।

কার্য পদ্ধতি ঃ

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের পদ্ধতিতে প্রদত্ত রাশির মান সরাসরি নির্ণয় করি।

ফল সংকলন ঃ

[.] 32 [x^y] 8 [x] 625 [x^y] 4 [÷] [.] 00432 [x^y] 2 [÷] [.] 31 [2] 5 [x^y] 3 [÷] 25 [=] [INV] [x^y]

5 [=] [-] 319 [.] 4727 log [=] 257.0643521

∴ প্রদত্ত রাশির মান = 257.06435

সতর্কতা ঃ

১. ক্যালকুলেটর ব্যবহারের সময় সাবধানতার সাথে কাজ করতে হবে।

২. কোন মোডে ক্যালকুলেটর আছে তা দেখে নিতে হবে।

৩. এমনভাবে বোতাম টিপতে হবে যাতে অন্য ফাংশন ক্যালকুলেটরে না আসে।

অনুশীলনী ১

প্রতি ক্ষেতে মেশিন-নির্ভুল উত্তর দেখাতে হবে।

মান নির্ণয় কর ঃ

১। $2.43 \times 72.3 \times 3.14 \div 26.031 - 4.0079$

২। (ক) $(23{\cdot}1)^{\frac{1}{4}}$ (খ) $(3{\cdot}1415)^{\frac{1}{4}}$

৩। (ক) $(13{\cdot}602)^5$ (খ) $(29{\cdot}375)^3$

৪। (ক) $\log_{10}321{\cdot}4927$ (খ) $\log_{10}x = {\cdot}99167$ হলে x এর মান কত?

৫। $\log_e 321{\cdot}4927$

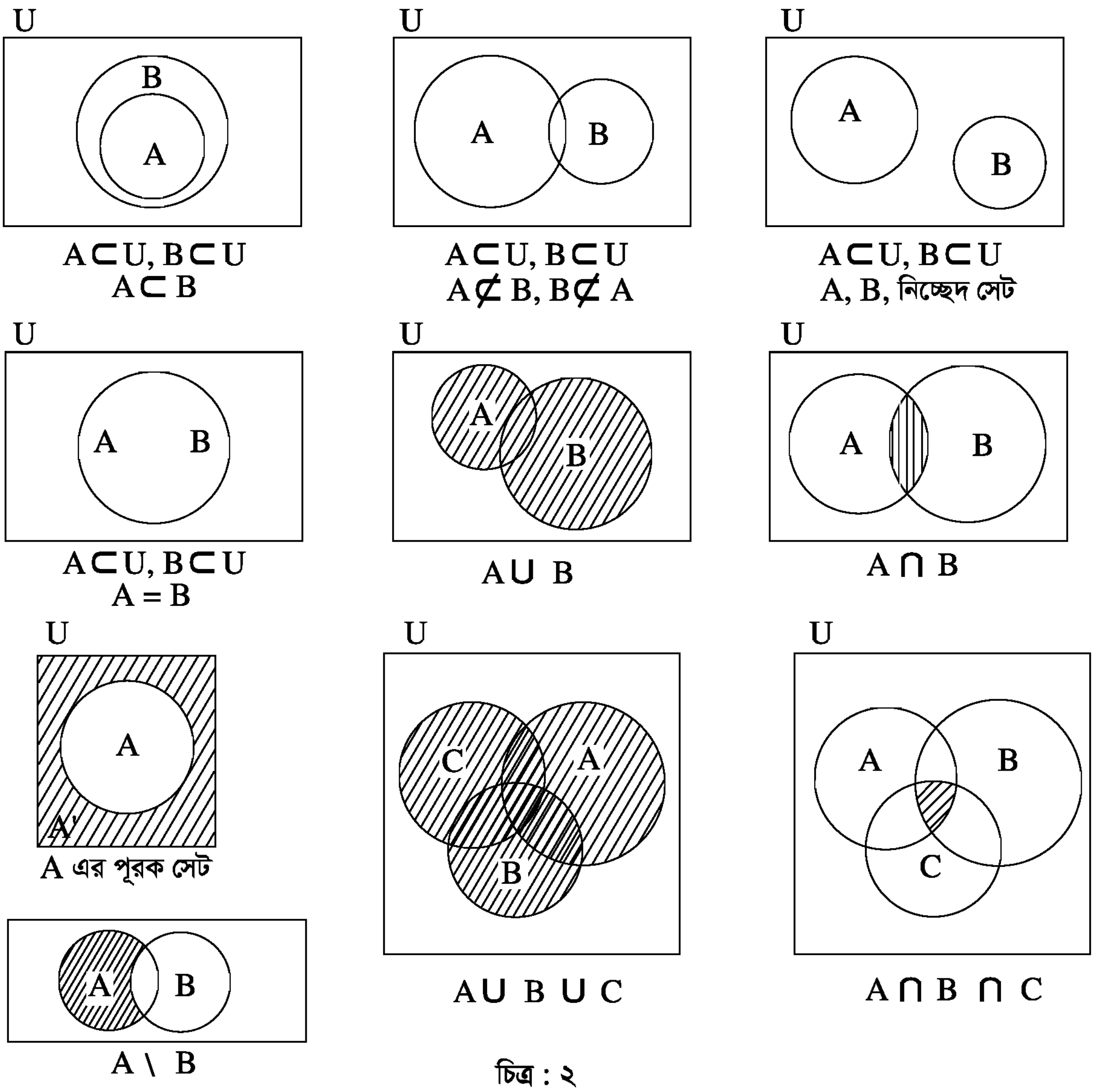
৬। $\tan 47^0 53' 37''$

দ্বিতীয় অধ্যায়

সেট এবং অন্বয়

২.১। ভেন চিত্রের প্রয়োগ

বিখ্যাত ইংরেজ তর্কশাস্ত্রবিদ জন্ ভেন্ যুক্তিশাস্ত্রে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের জন্য সর্ব প্রথম চিত্রের সাহায্য গ্রহণ করেন। তাঁর অনুসরণে চিত্রের সাহায্য সেট সংক্রান্ত বিভিন্ন প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করা হয়। এরূপ চিত্রকে ভেন চিত্র **(Venn diagram)** বলা হয়। নিম্নে কয়েকটি ভেন চিত্র দেখানো হল। এগুলোতে সার্বিক সেট **U** কে আয়তক্ষেত্র দ্বারা এবং সার্বিক সেটের উপসেটগুলোকে বিভিন্ন আকারের বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা চিত্রিত করা হয়েছে।



চিত্র : ২

সমস্যা নং ২.১	**তারিখ ঃ**

সমস্যা ঃ যেকোন A, B সেটের জন্য ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখাতে হবে যে, $B \setminus A' = B \cap A$

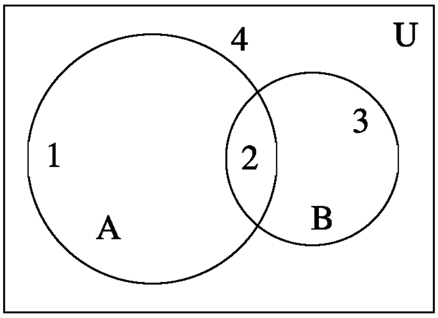
তত্ত্ব ঃ সেট $B \setminus A'$ এবং $B \cap A$ সমান হবে যদি ভেন চিত্রে তারা একই এলাকা দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্ত দ্বারা A, B সেট দুইটি সূচিত করি

২। বৃত্তদ্বয়কে একটি আয়তক্ষেত্রের মধ্যে আবদ্ধ করি যেন ঐ আয়তক্ষেত্র সার্বিক সেট U সূচিত করে।

৩। চিত্রের বিভিন্ন অংশকে 1,2,3,4 লিখে চিহ্নিত করি।



চিত্র -৩

ফল

সেট	**যে যে এলাকা নিয়ে গঠিত**	**মন্তব্য/ কারণ**
U	1,2,3,4	সার্বিক সেট
A	1,2	অঙ্কন
B	2,3	অঙ্কন
$B \cap A$	2	$B \cap A = \{ x : x \in B$ এবং $x \in A\}$
A'	3, 4	$A' = \{ x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$
$B \setminus A'$	2	$B \setminus A = \{x : x \in B$ এবং $x \notin A'\}$

$\therefore$ চিত্রে $B \setminus A' = B \cap A$.

সমস্যা নং ২.২	**তারিখ ঃ**

সমস্যা ঃ যে কোন A, B, C সেটের জন্য ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখাতে হবে যে

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

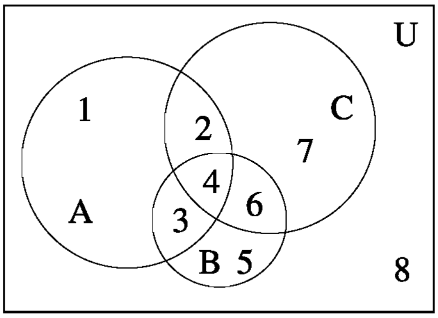
তত্ত্ব ঃ সেট $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ এবং সমান হবে যদি ভেন চিত্রে তারা একই এলাকা দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। তিনটি বৃত্ত দ্বারা A, B, C সেট তিনটি সূচিত করি। A, B, C বৃত্ত তিনটি এরূপে নিই যেন তারা একে অপরকে ছেদ করে এবং তিনটি বৃত্তেরও একটি সাধারণ ছেদাংশ থাকে।

২। A, B, C বৃত্ত তিনটিকে একটি আয়তক্ষেত্রের মধ্যে আবদ্ধ করি। মনে করি, ঐ আয়তক্ষেত্রের সার্বিক সেট U সূচিত করে।

৩। চিত্রের বিভিন্ন এলাকাকে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, লিখে চিহ্নিত করি।



চিত্র -৪

ফল ঃ

সেট	**যে যে এলাকা নিয়ে গঠিত**	**কারণ/মন্তব্য**
U	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	সার্বিক সেট
A	1, 2, 3, 4	অঙ্কন
B	3, 4, 5, 6	অঙ্কন
C	2, 4, 6, 7	অঙ্কন
$B\cap C$	4, 6	$B\cap C = \{ x : x\in B$ এবং $x\in C\}$
$A\cup(B\cap C)$	1,2,3,4,6	$A\cup(B\cap C) = \{ x : x\in A$ অথবা $x\in B\cap C\}$
$A\cup B$	1,2,3,4,5,6	$A\cup B = \{x : x\in A$ অথবা $x\in B\}$
$A\cup C$	1,2,3,4,6,7	$A\cup C = \{x : x\in A$ অথবা $x\in C\}$
$(A\cup B)\cap(A\cup C)$	1,2,3,4,6	$(A\cup B)\cap(A\cup C) = \{x : x\in A\cup B$ এবং $A\cup C\}$

$\therefore$ চিত্রে $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

সমস্যা নং ২.৩ -২.৭	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ যেকোন সেট A ও B এর জন্য ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখাতে হবে যে,

(ক) $A\cup(A'\cap B) = A\cup B$

(খ) $A\cap(A'\cup B) = A\cap B$

(গ) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

(ঘ) $(A\cup B)' = (A'\cap B')$

(ঙ) $(A\cap B)\cup(A\cap B') = A$

সমস্যা নং ২.৮ -২.১২	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ যেকোন সেট A B ও C এর জন্য ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখাতে হবে যে,

(ক) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

(খ) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

(গ) $A\cup(B\cap C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

(ঘ) $(A\cap B\cap C)' = A'\cup B'\cup C'$

(ঙ) $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

সমস্যা নং ২.১৩	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ সংখ্যা রেখায় R এর উপসেট $A = \{x ঃ -3 < x \leq 1.5\}$ চিত্রিত করতে হবে।

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। খাতায় একটি অনুভূমিক সরলরেখা আঁকি এবং তাতে মূলবিন্দু 0 চিহ্নিত করি।

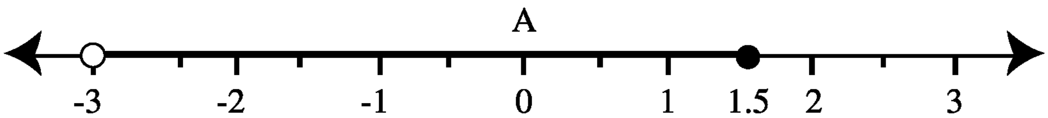
২। মূলবিন্দুর ডান পাশে সুবিধামত একক (এক্ষেত্রে 2 সে. মি.) দূরত্বে পর পর 1, 2, 3 বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি।

৩। মূলবিন্দুর বাম পাশে একই একক দুরত্বে পর পর -1, -2, -3 বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি।

৪। 1 এবং 2 এর অন্তর্বর্তী 1.5 বিন্দু (এক্ষেত্রে এই বিন্দু দুইটি দ্বারা খন্ডিত রেখাংশের মধ্যবিন্দু) চিহ্নিত করি।

৫। -3 বিন্দুটিকে ফাঁকা বৃত্ত (○) দিয়ে ও 1.5 সূচক বিন্দুটিকে ভরাট বৃত্ত (●) দিয়ে এবং তাদের মধ্যবর্তী রেখার অংশকে মোটা দাগ দিয়ে চিহ্নিত করি।

৬। সংখ্যারেখার চিহ্নিত অংশই যে A সেটের চিত্ররূপ তা ঐ অংশের উপর A লিখে নির্দেশ করি।



চিত্র : ৫

সমস্যা নং ২.১৪ - ২.১৬	তারিখ :

সমস্যা ঃ ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যারেখার R এর নিম্নোক্ত উপসেটগুলো চিত্রিত করতে হবে :

(i) $A = \{x ঃ -\frac{3}{4} \leq x < 3\}$

(ii) $B = \{x ঃ x \geq 4\}$

(iii) $C = \{x ঃ x < -0.5\}$

সমস্যা নং ২.১৭	তারিখ :

সমস্যা ঃ একই সংখ্যা রেখার R এর উপসেট

$A = \{x ঃ -1 < x \leq 3\}$ এবং

(ii) $B = \{x ঃ x > 2\}$ এবং চিত্রিত করে

(iii) $C = A \cap B$ এবং $D = A \cup B$ দেখাতে হবে।

সমস্যা নং ২.১৮	তারিখ :

সমস্যা ঃ $(2x - 1)(x + 2) \leq 0$ অসমতার সমাধান সেটকে R এর উপসেট রূপে সংখ্যারেখায় চিত্রিত করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ $a < b$ এর জন্য $(x - a)(x - b) \leq 0$ অসমতার সমাধান সেট $S = \{x ঃ a \leq x \leq b\}$

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। প্রদত্ত অসমতাটি সমাধান করে সমাধান সেট $S = \{x ঃ -2 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ নির্ণয় করি।

২। খাতায় একটি অনুভূমিক সরল রেখা এঁকে তাতে মূলবিন্দু 0 চিহ্নিত করি।

৩। সুবিধামত একক নিয়ে (সমস্যা নং ২.৫ এর কার্য পদ্ধতির অনুসরণ) $\frac{1}{2}$, 1 এবং -1, -2 বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি।

৪। - 2 এবং $\frac{1}{2}$ বিন্দু দুইটিকে ● দাগ দ্বারা চিহ্নিত করে তাদের মধ্যকার রেখাংশকে মোটা দাগ দিয়ে চিহ্নিত করি।

৫। সংখ্যা রেখার এই চিহ্নিত অংশই যে S সেটের চিত্র তা তার উপর S লিখে নির্দেশ করি।

সমাধান সেট নির্ণয় ঃ

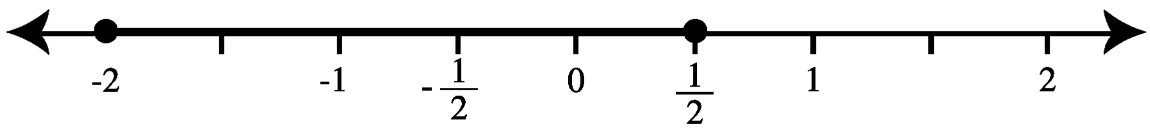
(i) $(2x - 1)(x + 2) \le 0$

বা, $2\,(x - \frac{1}{2})(x + 2) \le 0$

বা, $(x + 2)(x - \frac{1}{2}) \le 0$ [উভয় পক্ষে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\{x - (-2)\}(x - \frac{1}{2}) \le 0$

$\therefore$ নির্ণয় সমাধান ঃ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$



চিত্র : ৬

সমস্যা নং ২.১৯ -২.২২	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটকে আলাদা আলাদা সংখ্যা রেখায় চিত্রিত করতে হবে ঃ

(ক) $x^2 - 3x - 4 \le 0$

(খ) $(x + 1)(x - 2) \ge 0$

(গ) $2\,(2-x)\,x \ge (1 + x)$

(ঘ) $2\,(2 - x) \ge x\,(1 + x)$.

সমস্যা নং ২.২৩	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ $A = \{x : x \in R$ এবং $-2 < x < 5\}$ এবং $B = \{y$ ঃ $y \in R$ এবং $-\frac{3}{4} \le y \le \frac{2}{5}\}$ হলে স্থানাংক তলে A B এর লেখচিত্র আঁকতে হবে।

তত্ত্ব ঃ $A \times B\ \{(x, y)$ ঃ $x \in A$ এবং $y \in B\}$

এখানে, $A \times B = \{(x, y)$ ঃ $(x, y) \in R \times R,\ -2 \le x \le 5$ এবং $-\frac{3}{4} \le y \le \frac{5}{2}\}$।

কার্য পদ্ধতি ঃ

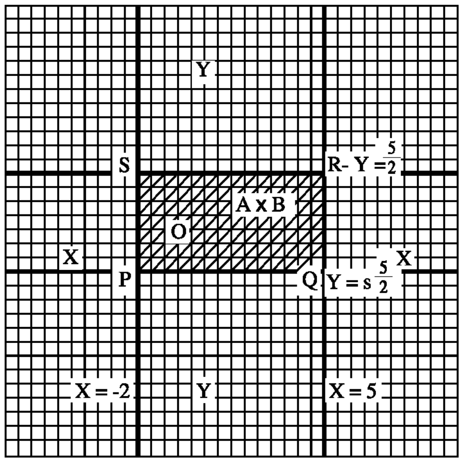
১। ছক কাগজে x অক্ষ X'OX এবং y অক্ষ Y'OY আঁকি।

২। সুবিধামত একক (একত্রে 4 ছোটঘর =1 একক) নিয়ে x অক্ষে -2 ও 5 বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করি এবং এদের প্রত্যেকটি দিয়ে y অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁকি।

৩। একই একক নিয়ে y অক্ষে $-\frac{3}{4}$ ও $\frac{5}{2}$ বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করি এবং এদের প্রত্যেকটি দিয়ে x -অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁকি।

৪। উপরে বর্ণিত রেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ আয়তক্ষেত্রটিকে PQRS নামে অভিহিত করি এবং গাঢ় দাগ দিয়ে চিহ্নিত করি।

৫। গাঢ় আয়তক্ষেত্রটির ভিতর A x B লিখে এটিই যে ঈপ্সিত লেখচিত্র তা নির্দেশ করি।



চিত্র -৭

সমস্যা নং ২.২৪	তারিখ :

সমস্যা ঃ $2x + 3y + 7 \leq 0$ অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র আঁকতে হবে।

তত্ত্ব ঃ $2x + 3y + 7 = 0$ সমীকরণের লেখ একটি সরলরেখা এবং (0, 0) বিন্দুতে $2x + 3y + 7 = 0$ এর মান $7 > 0$ বলে মূলবিন্দুর দিক রেখাটির ধনাত্মক দিক বলা হয়।

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। $2x + 3y + 7 = 0$ সমীকরণের দুইটি বিন্দু (1, -3) এবং (-5, 1) নির্ণয় করি।

২। ছক কাগজে x অক্ষে X'0X ও y অক্ষে Y'0Y এঁকে সুবিধাজনক একক (এক্ষেত্রে ১ ছোট ঘর = 1 একক) নিয়ে A (1, -3) ও B (-5, 1) বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করি এবং AB সরলরেখাটি আঁকি।

৩। এই রেখার উপর অবস্থিত নয় এমন একটি বিন্দু (0, -4) নিই। এখন (0, -4) বিন্দুটি লেখাচিত্রের নিচের অংশে আছে। এই বিন্দুতে $2x + 3y + 7 = 0 + 3 \times (-4) + 7 = -5 < 0$.

সুতরাং লেখরেখাটি ও তার নিচের অংশ (অর্থাৎ যে অংশে (0, -4) বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার সমাধান সেটের লেখ।

৪। AB রেখাসহ রেখাটির নিচের এলাকা গাঢ়ভাবে চিত্রিত করে সমাধান সেটের লেখচিত্র নির্দিষ্ট করি।

বিন্দু নির্ণয় ঃ

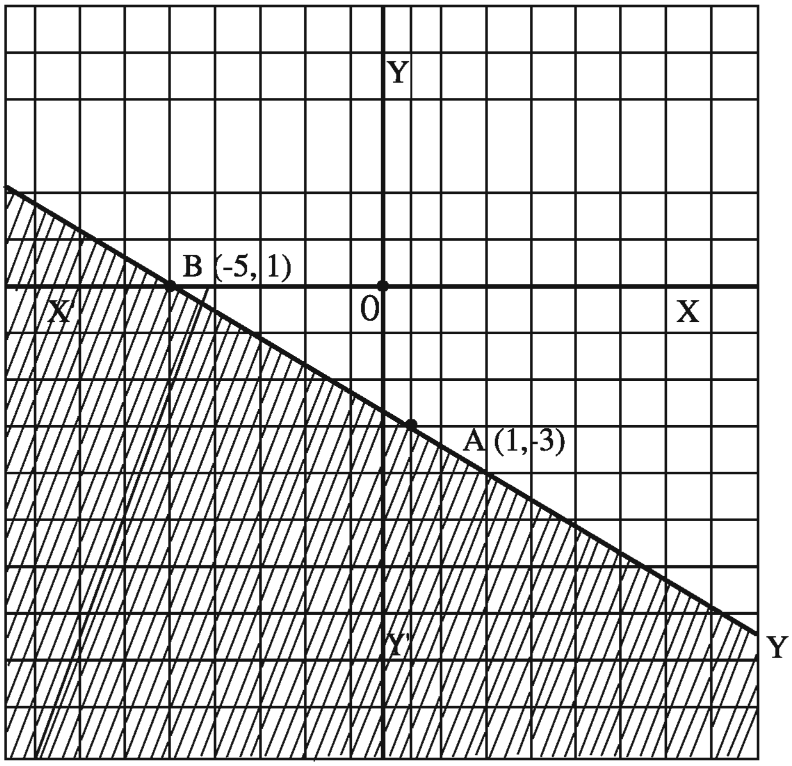
x	1	-5
y	-3	1

$x = 1, \longrightarrow 2 \times 1 + 3y + 7 = 0$

$\longrightarrow 3y + 9 = 0 \qquad \therefore y = -3$

$y = 1, \longrightarrow 2x + 3 \times 1 + 7 = 0$

$\longrightarrow 2x + 10 = 0 \qquad \therefore x = -5$



চিত্র : ৮

সমস্যা নং ২.২৫ - ২.২৭	তারিখ :

সমস্যা নং ঃ নিম্নোক্ত প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র (আলাদা ভাবে) আঁকতে হবে।

(ক) $3x + 4y \leq 12$

(খ) $3x + 4y \leq 18$

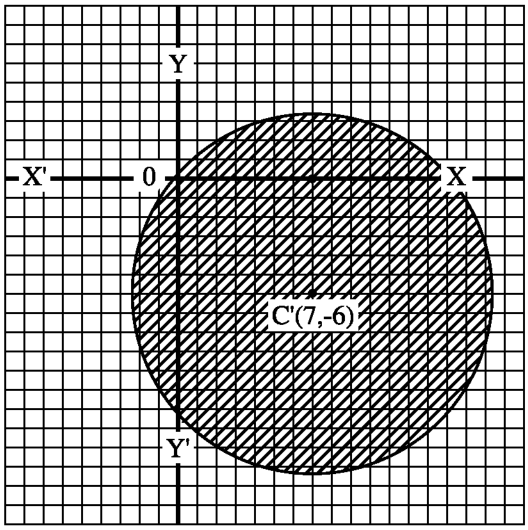
(গ) $2x + 3y \leq 6$.

সমস্যা নং ২.২৮	তারিখ :

সমস্যা নং $x^2 + y^2 - 14x + 12y + 21 \leq 0$ অসমতার সমাধান সেট স্থানাংক তলে চিত্রিত করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ $(x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2$ সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত যায় কেন্দ্র (h,k) বিন্দু ও যার ব্যাসার্ধ r এবং শুধুমাত্র এই বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ (x,y) বিন্দুসমূহের জন্য $(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$।

কার্য পদ্ধতি ঃ



চিত্র : ৯

১। $x^2 + y^2 - 14x + 12y + 21 = 0$

সমীকরণটিকে $(x - 7)^2 + \{y - (-6)\}^2 = 8^2$

আকারে রূপান্তরিত করে দেখি যে সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (7, - 6) ও ব্যাসার্ধ 8।

২। ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ আঁকি এবং সুবিধামত একক (এক্ষেত্রে ১ ছোট ঘর = 1 একক) নিয়ে

C (7, - 6) বিন্দুটি চিহ্নিত করি।

৩। C কেন্দ্র করে 8 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

৪। বৃত্তটিকে ও বৃত্তটি দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকাকে গাঢ় করে প্রদত্ত অসমতার সমাধান সেট বিহ্নিত করি।

রূপান্তর ঃ

$x^2 + y^2 - 14x + 12y + 21 = 0$

বা, $(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 12y + 36) = 49 + 36 - 21$

বা, $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 64$

বা, $(x - 7)^2 + \{y - (-6)\}^2 = 8^2$

সমস্যা নং ২.২৯ - ২.৩০	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেট আলাদা ভাবে চিত্রিত করতে হবে।

(ক) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 \leq 0$

(খ) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 \leq 0$

সমস্যা নং ২.৩১	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

পর্যবেক্ষন ঃ লক্ষ করি যে,

(১) প্রদত্ত সমীকরণে x এর স্থলে -x বসালে সমীকরণটির কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং লেখচিত্রটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। অনুরূপভাবে y এর স্থলে -y বসালে ও সমীকরণটির কোন পরিবর্তন হয় না। অতএব লেখচিত্রটি x অক্ষের সাপেক্ষে ও প্রতিসম। সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত অংশের লেখ আঁকাই যথেষ্ট।

(২) প্রদত্ত সমীকরণে $\frac{x^2}{36} \leq 1$ অর্থাৎ $-6 \leq x \leq 6$.

সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগে সমীকরণটির সমাধান সেট $S = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 6, y = \frac{5}{6}\sqrt{36 - x^2}\}$.

কার্য পদ্ধতি

১। $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ এর জন্য সমীকরণ থেকে y এর অঋণাত্মক আসন্ন মান নির্ণয় করি।

২। ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ এঁকে সুবিধামত একক (এক্ষেত্রে 1 ছোট ঘর = 1 একক) নিয়ে নির্ণীত (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি।

৩। স্থাপিত বিন্দুগুলো দিয়ে সুষমভাবে বক্ররেখা টেনে লেখচিত্রের প্রথম চতুর্থভাগে অবস্থিত অংশ আঁকি।

৪। y অক্ষে প্রতিবিম্বিত করে লেখচিত্রের দ্বিতীয় চতুর্থভাগে অবস্থিত অংশ আঁকি।

৫। x অক্ষে প্রতিবিম্বিত করে লেখচিত্রের বাকি অংশ এঁকে লেখচিত্রটি সম্পূর্ণ করি।

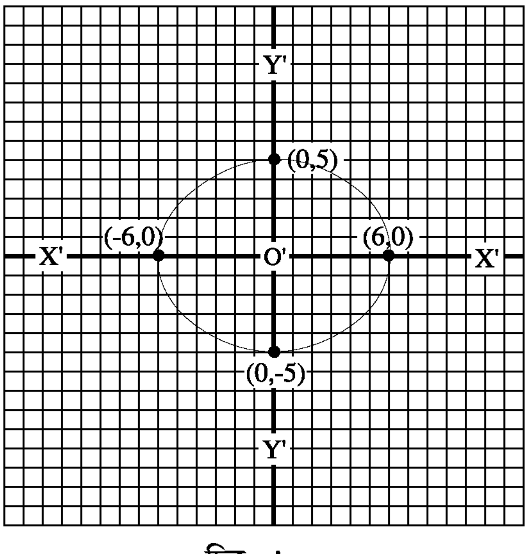
বিন্দু নির্ণয়

সমীকরণ থেকে পাই $y^2 = 25\ (1- \frac{x^2}{36})$ বা $y = \pm \frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$

$y = \frac{5}{6}\sqrt{36 - x^2}$ যেহেতু প্রথম চতুর্ভাগে $x > 0, y > 0$. সুতরাং y এর ঋণাত্মক মান অগ্রাহ্য করে।

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের ছক পূরণ করে পাই,

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	4.93	4.71	4.33	3.73	2.76	0



চিত্র : ১০

সমস্যা নং ২.৩২ - ২.৩৩	তারিখ :

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত প্রত্যেক অসমতার সমাধানের লেখচিত্র (আলাদা আলাদা ভাবে) আঁকতে হবে ঃ

(ক) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ (খ) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} \leq 1$

সমস্যা নং ২.৩৪ - ২.৩৭	তারিখ :

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত প্রত্যেক সমীকরণের লেখচিত্র (আলাদা আলাদা ভাবে) আঁকতে হবে।

(ক) $y = 4x^2$ (খ) $y = -3x^2$

(গ) $y^2 = 12x$ (খ) $y^2 = -9x$

নমুনা সমস্যা

সমস্যা নং ২.৩৪ - ২.৩৮	তারিখ :

সমস্যা ঃ $2x - 3y \leq -6$ অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র আঁকতে হবে।

তত্ত্ব ঃ $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের রেখা একটি সরল রেখা এবং $(0,0)$ বিন্দুতে $2x + 3y + 6 = 0$ এর মান যা একটি ধনাত্মক সংখ্যা বলে মূলবিন্দুর দিক রেখাটির ধনাত্মক দিক।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ ১। সরু করে কাটা একটি পেন্সিল

২। স্কেল

৩। ছক কাগজ

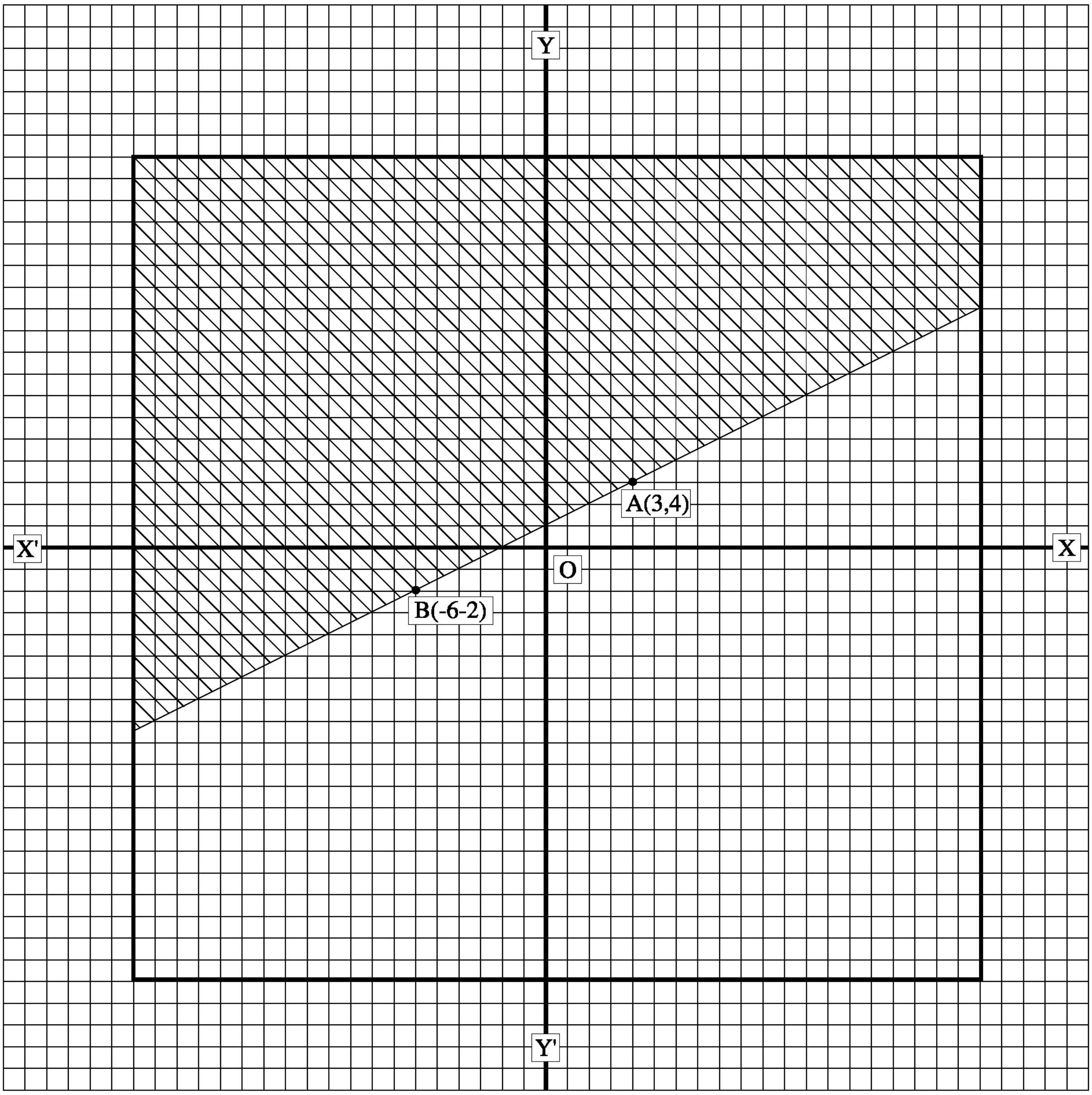
৪। বলপেন

৫। রাবার ইত্যাদি

কাজের ধারা ঃ ১। $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের দুইটি সমাধান (3, 4) এবং (-6, -2) নির্ণয় করি।

২। ছক কাগজে x অক্ষে X'OX এবং y অক্ষে Y'OY এঁকে সুবিধাজনক একক নিয়ে A (3,4) এবং B (-6, -2) বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করি এবং AB রেখাটি আঁকি।

৩। AB রেখাসহ রেখাটির ঋণাত্মক দিক (এক্ষেত্রে মূলবিন্দুর বিপরীত) গাঢ়ভাবে চিত্রিত করি এবং সমাধান সেটের লেখচিত্র নির্দিষ্ট করি।



চিত্র : ১১

সমাধান নির্ণয় ঃ

$x = 3 \Rightarrow 6 - 3y + 6 = 0$

$\Rightarrow -3y = -12$

$\therefore y = 4$

$x = -6 \Rightarrow -12 - 3y + 6 = 0$

$\Rightarrow -3y = 6$

$\therefore y = -2$

বিন্দু নির্ণয় ঃ

x	3	-6
y	4	-2

(x,y) = (3, 4), (-6, -2)

ফলাফল ঃ $2x - 3y \leq -6$ অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র চক কাগজের প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্থভাগে অবস্থিত।

সতর্কতা ঃ ১। নির্ভূল লেখচিত্র পাবার জন্য সরু করে কাটা পেন্সিল ব্যবহার করতে হবে।

২। বিন্দুগুলো সংযোজন করার সময় সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে।

নমুনা সমস্যা ঃ

সমস্যা নং ২.৩৯	তারিখ :

সমস্যা ঃ $y = x^2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ সমীকরণের সমাদান সেট $S = \{(x,y) ঃ y = x^2\}$.

পর্যবেক্ষণ ঃ লক্ষ্য করি যে,

(১) প্রদত্ত সমীকরণে x এর স্থলে - x বসালে সমীকরণটির কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং লেখচিত্রটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(২) প্রদত্ত সমীকরণে $-\infty < x < \infty$ এবং $0 \leq y < \infty$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ ক্যালকুলেটর, রাবার, সার্পনার, গ্রাফ পেপার, সরু করে কাটা HB পেন্সিল, খাতা, কলম ইত্যাদি ।

কার্য পদ্ধতি ঃ

(১) x এর মান $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, ...এর জন্য $y = x^2$ সমীকরণ থেকে y এর মান নির্ণয় করি।

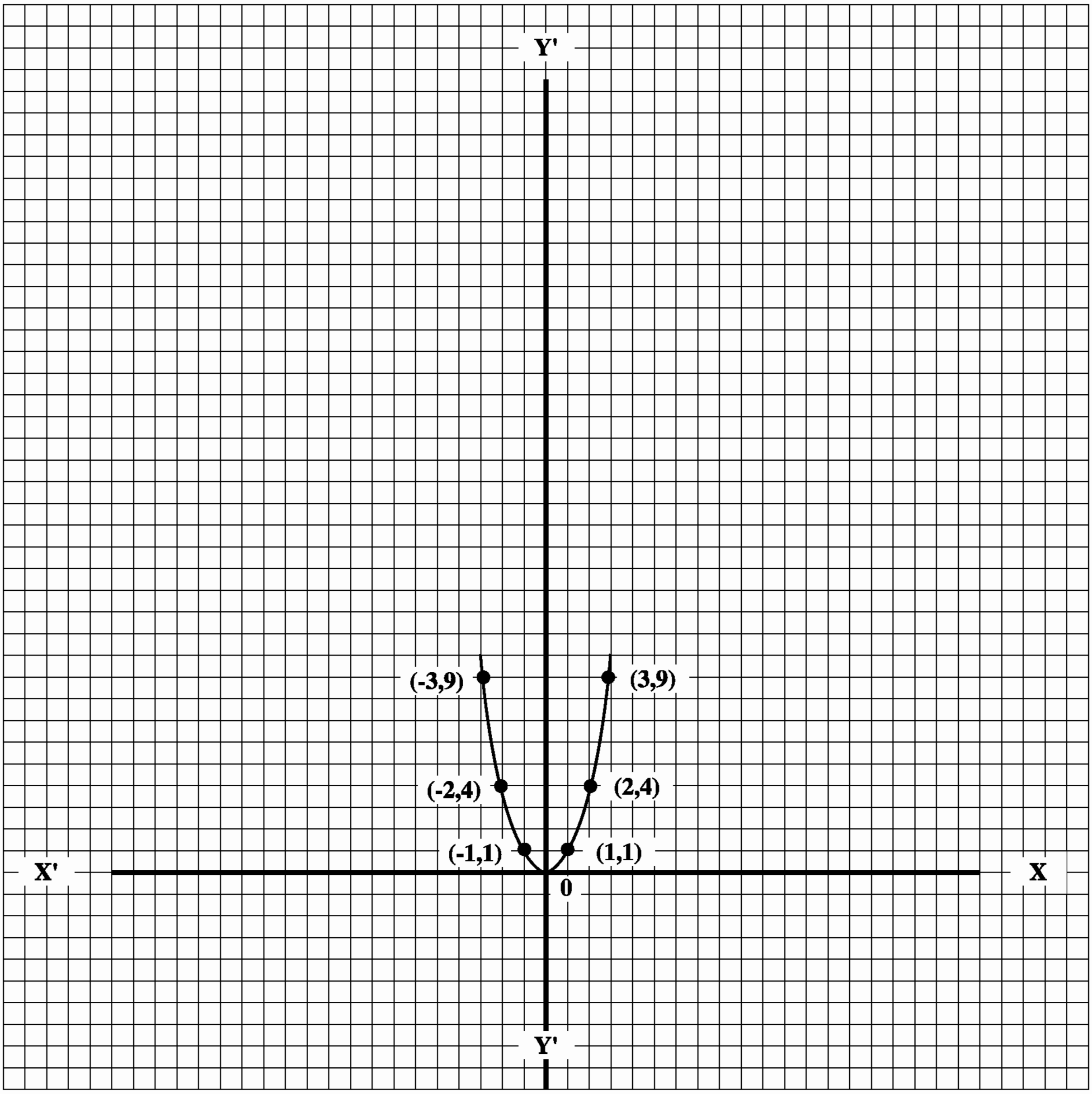
(২) ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ এঁকে সুবিধামত একক (এক্ষেত্রে 1 ছোট ঘর = 1 একক) নিয়ে নির্ণীত (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি।

(৩) স্থাপিত বিন্দুগুলো দিয়ে সুষমভাবে বক্ররেখা টেনে লেখচিত্র আঁকি।

বিন্দু নির্নয় ঃ সমীকরণটি $y = x^2$

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের ছক তৈরি করে পাই

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16



চিত্র : ১২

ফলাফল ঃ লেখ থেকে দেখা যায় যে, $y = x^2$ সমীকরণের লেখটি একটি পরাবৃত্ত (Parabola)।

সতর্কতা ঃ 1. সরু করে কাটা HB পেন্সিল ব্যবহার করেছি।

2. বিন্দুগুলো সংযোগ করার সময় সাবধানতা অবলম্বন করেছি।

মন্তব্য ঃ লেখটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

তৃতীয় অধ্যায়

পরিসংখ্যান

৩.১। উপাত্ত বিন্যস্তকরণ

গনসংখ্যা নিবেশন সারণির সাহায্যে অবিন্যস্ত তথ্যকে বিন্যস্ত করা হয়।

অবিন্যস্ত তথ্যরাশি বিন্যস্ত করতে হলে নিম্নলিখিত বিষয়গুলোর প্রতি সতর্ক থাকা দরকার :

(ক) অবিন্যস্ত তথ্যরাশি পর্যবেক্ষণ করে (উপাত্তগুলোর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের প্রতি লক্ষ্য রেখে) সুবিধামত শ্রেণী ব্যবধান (যদি অন্যরূপ উল্লেখ না থাকে) নিতে হয়।

(খ) সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন উপাত্তদ্বয়ের বিয়োগফলকে শ্রেণী ব্যবধান দিয়ে ভাগ করে শ্রেণী সংখ্যা নির্নয় করতে হবে। শ্রেণী সংখ্যা ভগ্নাংশ হলে পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যা ধরতে হবে।

(গ) প্রদত্ত উপাত্তগুলোকে তাদের মান অনুযায়ী নির্দিষ্ট শ্রেণীতে টালি চিহ্ন দিতে হবে। টালি চিহ্নিত করার সময় প্রতি শ্রেণীতে একটি উপাত্তের জন্য একটি খাড়া দাগ দিয়ে এরূপ চারটি দাগের পর ঐ চারটি খাড়া দাগকে ছেদ করে এমন একটি তির্যক দাগ দিয়ে **পঞ্চম** দাগটি সম্পন্ন করতে হয়।

(ঘ) টালি করা শেষ হলে প্রতি শ্রেণীর টালি গণনা করে ঘটনসংখ্যা বা গনসংখ্যা নির্ণয় করতে হয়।

(ঙ) প্রতি শ্রেণী পরিসরের গড় নির্ণয় করে ঐ শ্রেনীর মধ্যমান নির্ণয় করতে হবে। শ্রেণী পরিসর বা শ্রেণী ব্যাপ্তি, টালি গণসংখ্যা, শ্রেণী মধ্যমান ইত্যাদি তথ্য আলাদা কলামে স্থাপন করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করতে হবে।

সমস্যা নং ৩.১	তারিখ :

সমস্যা : কোন স্কুলের দমম শ্রেণীর ৭৫ জন শিক্ষার্থী কোন এক পরীক্ষায় গণিত বিষয়ে যে নম্বর পেয়েছে তার তালিকা নিম্নে দেওয়া হল ক্রমানুসারে এদের শ্রেণীভুক্ত করে বিন্যাস করতে হবে।

60, 86, 97, 63, 85, 92, 71,65, 95, 83, 99, 72, 84, 80, 36, 61, 87, 97, 83, 64, 85, 93, 59, 94, 41, 96, 76, 44, 38, 89, 72, 90, 49, 97, 79, 93, 55, 88, 50, 98, 42, 92, 48, 39, 94, 90, 59, 93, 75, 87, 54, 88, 94, 56, 90, 94, 43, 90, 94, 82, 56, 95, 48, 90, 81, 87, 77, 87, 89, 47, 83, 99, 82, 79, 49.

কার্য পদ্ধতি :

১। উপাত্তগুলো সবই 100 অপেক্ষা কম এবং আরম্ভ থেকে শেষ পর্যন্ত একবার পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় উপাত্তগুলোর কোনটিই 30 অপেক্ষা কম নয়।

২। উপাত্তগুলোকে 31 থেকে 10 ব্যবধানে কয়েকটি শ্রেণীতে নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে বিন্যাস করি।

শ্রেণী	শ্রেণীভুক্ত উপাত্ত তালিকা
31 - 40	36, 38, 39
41 - 50	41, 42, 43, 44, 47, 48, 48, 49, 49, 50
51 - 60	54, 55, 60, 59, 59, 56, 56
61 - 70	63, 65, 61, 64
71 - 80	71, 72, 72,75, 80, 76, 79, 77, 79
81 - 90	85, 83, 84, 83, 85, 82, 81, 83, 82, 86,87, 89, 90, 88, 90, 87, 88, 90, 90, 90, 87, 87, 89
91 - 100	92, 95, 93, 94,93, 92, 94, 93, 94, 94, 94, 95, 97, 99, 97, 96, 97, 98, 99

সমস্যা নং ৩.২	তারিখ :

সমস্যা : কোন পরীক্ষায় 50 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল। শ্রেণী ব্যবধান 5 নিয়ে একটি গনসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করতে হবে।

84, 86, 97, 85, 92, 71, 95, 83, 99, 71, 80, 87, 85, 83, 97, 93, 94, 96, 76, 89, 72, 90, 79, 97, 93, 88, 98, 92, 94, 90,93, 75, 77, 87, 88, 94, 90, 94, 90, 94, 95, 90, 81, 87, 89, 87, 83, 99, 82, 79,

তত্ত্ব : মনে করি, উপাত্তগুলোর সর্বনিম্ন মান $= x_1$

এবং সর্বোচ্চ মান $= x_2$

শ্রেী ব্যবধান $= h$

শ্রেনী সংখ্যা $= k$

$\therefore$ পরিসর $= x_2 - x_1$

শ্রেণী সংখ্যা $k = \frac{\text{পরিসর}}{\text{শ্রেণী ব্যবধান}} = \frac{x_2 - x_1}{h}$

কার্য পদ্ধতি :

১। প্রদত্ত উপাত্তগুলো পর্যবেক্ষণ করে দেখি যে, $x_1 = 71, x_2 = 99$ এবং দেওয়া আছে $h = 5$

২। $\frac{x_2 - x_1}{h} = \frac{99 - 71}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$ পাওয়া গেল

৩। প্রকৃত শ্রেণী সংখ্যা = 6 ধরি এবং 70 থেকে 100 পর্যন্ত 50টি সংখ্যাকে নিম্ন ছক অনুযায়ী 6 টি শ্রেণীতে বিন্যাস করি এবং শ্রেণী ব্যাপ্তি, টালি ও গণসংখ্যা কলাম পূরণ করি।

গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি

শ্রেণী ব্যাপ্তি	টালি	গণসংখ্যা বা ঘটনসংখ্যা (f)
71 -75	////	4
76 - 80	~~////~~	5
81 - 85	~~////~~ ///	8
86 - 90	~~////~~ ~~////~~ ////	14
91 - 95	~~////~~ ~~////~~ //	12
96 - 100	~~////~~ //	7

দ্রষ্টব্য ঃ উপাত্তগুলো সবই পূর্ণসংখ্যা হওয়াতে শ্রেণীগুলো বিচ্ছিন্ন হয়েছে।

কিন্তু যখন উচ্চতা, দৈর্ঘ্য, ওজন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয় তখন উপাত্তগুলো ভগ্নাংশ হতে পারে। এজন্য শ্রেণী ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন (Continuous) করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণী ব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন করার জন্য প্রকৃত শ্রেণীসীমা নির্ণয় করে নিতে হবে। প্রথম শ্রেণীর উচ্চসীমা এবং তার পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার ব্যবধান d হলে, প্রথম শ্রেণীর প্রকৃত নিম্নসীমা = শ্রেণীর নিম্নসীমা – $\frac{d}{2}$। প্রথম শ্রেণীর প্রকৃত উচ্চসীমা = শ্রেণীর উচ্চসীমা + $\frac{d}{2}$। [পরবর্তী উদাহরণে দেখানো হয়েছে]

সমস্যা নং ৩.৩	**তারিখ :**

সমস্যা : নিম্নোক্ত তালিকায় 30 জন লোকের ওজন কিলোগ্রামে প্রকাশ করা হল।

49, 52.5, 55, 61, 63, 65.7, 38, 40, 42, 56, 60, 60.8, 49.7, 58, 52.3, 59.2, 50, 48.3, 42, 62, 57.5, 63.2, 64.3, 47, 51.3, 58, 59, 66, 62.5, 49.3.

প্রদত্ত তথ্যরাশি থেকে 7 টি শ্রেণী সম্বলিত একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করতে হবে।

তত্ত্ব : মনে করি, উপাত্তগুলোর সর্বনিম্ন মান = x_1

এবং সর্বোচ্চ মান = x_2

$\therefore$ পরিসর = $x_2 - x_1$

শ্রেণী সংখ্যা = k

$\therefore$ শ্রেণী ব্যবধান = $\frac{x_2 - x_1}{k} = h$

কার্য পদ্ধতি :

১। পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় যে $x_1 = 38, x_2 = 66$ এবং দেওয়া আছে $k = 7$

২। শ্রেণী ব্যবধান $h = \frac{66-38}{7} = \frac{28}{7} = 4$ নির্ণয় করি।

৩। উপাত্তগুলো ভগ্নাংশ থাকায় প্রকৃত শ্রেণী ব্যবধানে 4 ধরে বিন্যাস করলে কিছু উপাত্তের অবস্থান নির্ণয়ে অসুবিধা হয় এই অসুবিধা দূর করার জন্য শ্রেণী ব্যবধান 5 ধরি।

৪। ছক বিন্যাসের জন্য শ্রেণী ব্যাপ্তি, প্রকৃত শ্রেণী সীমা, ট্যালি ও ঘটনসংখ্যা কলাম গুলো নিম্নরূপে পূরণ করি।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	**প্রকৃত শ্রেণী সীমা**	**টালি**	**গণসংখ্যা (f)**
36 - 40	35.5 - 40.5	//	2
41 - 45	40.5 - 45.5	//	2
46 - 50	45.5 - 50.5	~~////~~ /	6
51 - 55	50.5 - 55.5	////	4
56 - 60	55.5 - 60.5	~~////~~ //	7
61 - 65	60.5 - 65.5	~~////~~ //	7
66 - 70	65.5 - 70.5	//	2

$n = \sum f = 30$

উপরিউক্ত সারণিতে $d = 41 - 40 = 1$. প্রথম শ্রেণীর প্রকৃত নিম্নসীমা $= 36 - \frac{1}{2} = 35.5$ এবং প্রকৃত উচ্চসীমা $= 40 + \frac{1}{2} = 40.5$। সুতরাং 36 - 40 শ্রেণীর প্রকৃত শ্রেণীসীমা হবে 35.5 - 40.5। এখানে প্রতিটি শ্রেণীর উচ্চসীমা তার পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার সমান হবে, এক্ষেত্রে উক্ত শ্রেণীর উচ্চসীমাকে পরবর্তী শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত হিসাবে ধরতে হবে। অর্থাৎ 40.5 কে দ্বিতীয় শ্রেণীতে, 45.5 কে তৃতীয় শ্রেণীতে এবং অনুরূপে অন্যান্য শ্রেণীর উচ্চসীমাকে পরবর্তী শ্রেণীতে অর্ন্তভুক্ত হিসাবে গন্য করতে হবে।

সমস্যা নং ৩.৪	**তারিখ :**

কোন শহরের 60 জন ফেরিওয়ালার কোন একদিনের বিক্রয় থেকে (টাকায় প্রকাশিত) লাভ নিম্নরূপঃ

86, 95, 71, 97, 76, 79,111, 94, 94, 87, 97, 83, 84, 83, 89, 93, 90, 107, 95, 89, 85, 99, 80, 85, 72, 88, 93, 90, 101, 88, 92 102, 108, 93, 90, 98, 75, 94, 90, 104, 71, 108, 87, 94, 100, 92, 87, 112, 81, 99, 105, 103, 113, 96, 97, 94, 88, 90, 77, 82.

ক) ক্রমানুসারে এদের শ্রেণীভুক্ত করে বিন্যাস করতে হবে।

খ) উপাত্তগুলোর একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করতে হবে (শ্রেণী ব্যবধান 10 ধরে)

সমস্যা নং ৩.৫	তারিখ :

কোন হাসপাতালে দুই সপ্তাহে 60 টি শিশু জন্মগ্রহণ করে। জন্মকালে তাদের ওজন কিলোগ্রামে নিম্নরূপ ছিল ঃ

2.7, 2.5, 3.0, 3.7, 3.2, 2.9, 2.1, 3.8, 3.4, 3.2, 2.9, 2.1, 2.8, 3.2, 3.5, 2.7, 2.8, 3.1, 3.3, 2.9, 2.7, 3.1, 3.3, 3.5, 3.8, 3.1, 2.9, 2.5, 2.9, 3.0, 2.3, 3.7, 3.4, 3.1, 3.8, 3.9, 2.9, 3.6, 2.8, 3.3, 3.2, 2.9, 2.6, 3.1, 3.3, 2.6, 2.9, 3.0, 3.2, 3.3, 2.8, 3.0, 3.3, 2.9, 2.4, 2.8, 2.5, 3.1, 3.3, 3.9.

ক) উপাত্তগুলো ক্রমানুসারে শ্রেণীভুক্ত করে বিন্যাস করতে হবে।

খ) 0.2 শ্রেণী ব্যবধান নিয়ে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করতে হবে।

৩.২। উপাত্তের লেখচিত্র

(ক) আয়তলেখ (Histogram) ঃ বিন্যাসকৃত উপাত্ত উপস্থাপনের বহুল ব্যবহৃত লেখ হল আয়তলেখ। গ্রাফ কাগজে x অক্ষ বরাবর প্রত্যেক শ্রেণীর শ্রেণীব্যাপ্তি এবং y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা স্থাপন করে প্রত্যেক শ্রেণীর গণসংখ্যা অনুসারে আয়তক্ষেত্র অংকন করা হলে কতগুলো পাশাপাশি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাবে। এ আয়তক্ষেত্রগুলির সেট ই হল আয়তলেখ।

সমস্যা নং ৩.৬	তারিখ :

সমস্যা ঃ ঢাকা মহানগরীর একটি পোশাক কারখানায় কর্মরত ৩০ জন কর্মচারির সাপ্তাহিক বেতন টাকায় নিম্নরূপ ঃ
152, 340, 169, 230, 347, 265, 440, 790, 790, 592, 467, 631, 373, 448, 733, 413, 475, 585, 507, 735, 597, 837, 738, 598, 487, 525, 638, 447, 885, 592, 473.

প্রদত্ত উপাত্ত অবলম্বনে আয়তলেখ আঁকতে হবে।

তত্ত্ব ঃ মনে করি, উপাত্তগুলোর সর্বনিম্ন মান = x_1

এবং সর্বোচ্চ মান = x_2

মনে করি, শ্রেণী ব্যবধান = h

শ্রেণী সংখ্যা $k = \frac{x_2 - x_1}{h}$

কার্য পদ্ধতি :

১। পর্যবেক্ষণ করে দেখা যা যে, $x_1 = 152, x_2 = 885$

পরিসর = 885 - 152 = 733

ধরা যাক, শ্রেণী ব্যবধান h = 150

তাহলে, শ্রেণী সংখ্যা $k = \frac{733}{150} = 4.886$

২। শ্রেণী সংখ্যা 5 ধরে নিম্নের ছক পূরণ করি।

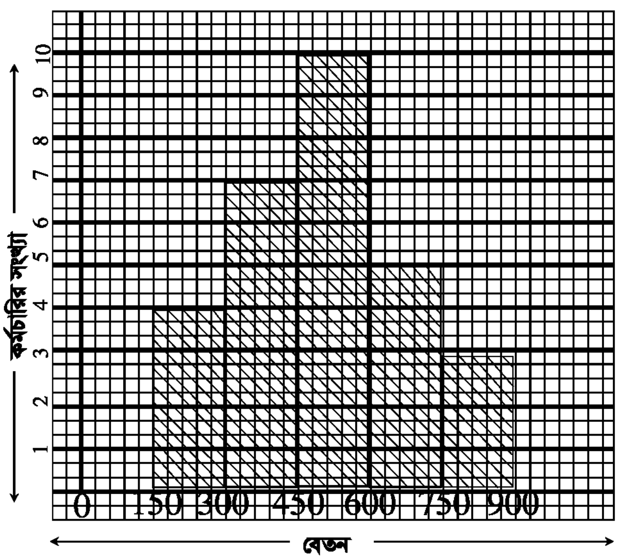
শ্রেণী ব্যাপ্তি	টালি	ঘটনসংখ্যা
150 -300	////	4
300 - 450	~~////~~ //	7
450 - 600	~~////~~ ~~////~~ /	11
600 - 750	~~////~~	5
750 - 900	///	3

৩। লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে x অক্ষ বরাবর 30 এবং y অক্ষ বরাবর তিন একক দৈর্ঘকে 1 ধরি।

৪। প্রত্যেক শ্রেণীর শ্রেণী ব্যাপ্তি দ্বারা সীমাবদ্ধ সরল রেখাংশের উপর একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করি যার উচ্চতা ঐ শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা সূচিত করে। পার্শ্বে অঙ্কিত লেখচিত্রের প্রথম আয়তক্ষেত্রটির ভূমি 150 ও 300 দ্বারা সীমাবদ্ধ এবং উচ্চতা ঐ শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা 4 কে সূচিত করে।

৫। একই পদ্ধতিতে পরস্পর সংলগ্ন 5 টি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করি।

৬। অঙ্কিত আয়তলেখের আয়তক্ষেত্রগুলো তির্যক রেখা দ্বারা চিহ্নিত করি।



চিত্র : ১১

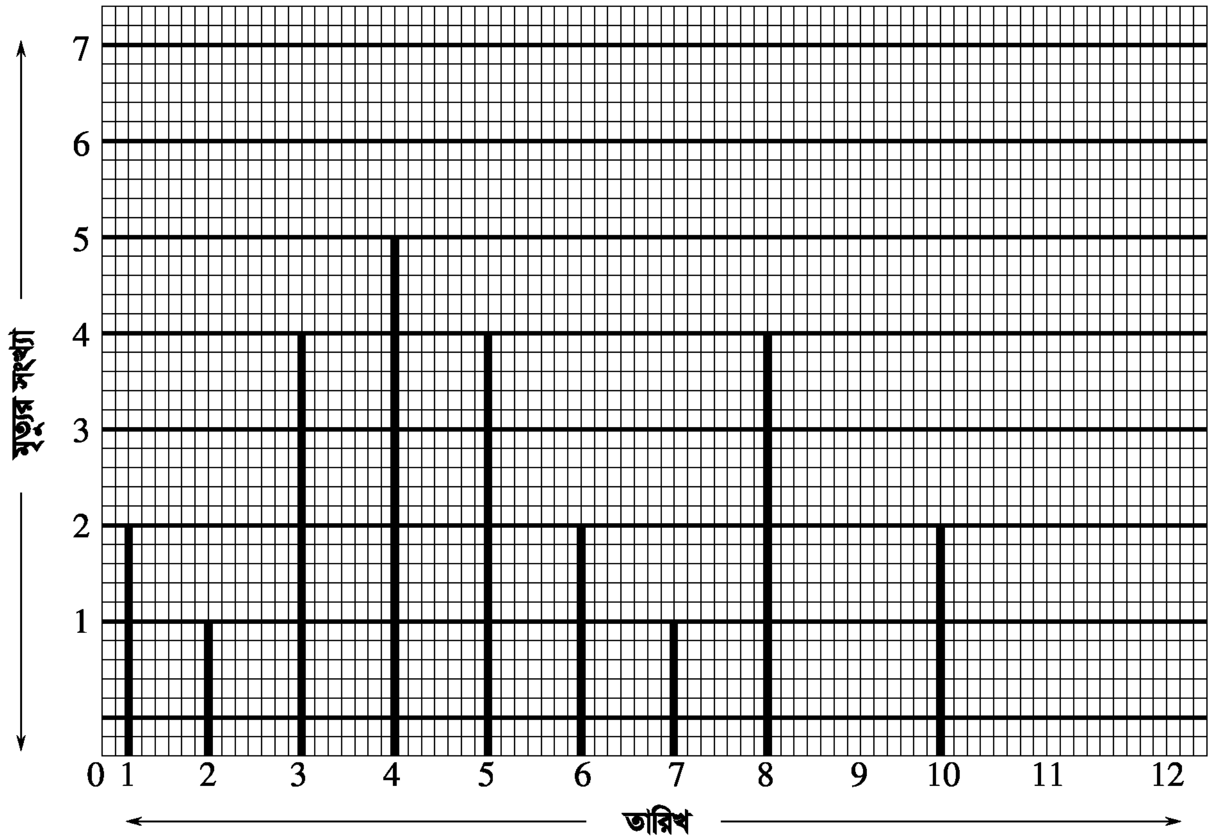
(খ) দন্ডচিত্র (Bar Diagram)

সমস্যা নং ৩.৭	তারিখ :

সমস্যা : ঢাকা মহানগরীতে কোন মাসের প্রথম দশদিনে দুর্ঘটনাজনিত মৃত্যুর পরিসংখ্যান ধারাবাহিকভাবে নিম্নরূপ ঃ

তারিখ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
মৃত্যুসংখ্যা :	2	1	4	4	5	2	1	4	0	2

প্রদত্ত তথ্য অবলম্বনে একটি দন্ডচিত্র আঁকতে হবে।



চিত্র : ১২

কার্য পদ্ধতি :

১। প্রদত্ত গ্রাফ কাগজে x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র পাঁচ বর্গ ব্যবধানে তারিখগুলো বসাই।

২। y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র ৫ বর্গ = ১ একক ধরি।

৩। প্রদত্ত পরিসংখ্যান থেকে প্রাপ্ত তারিখ অনুসারে মৃত্যুসংখ্যা y অক্ষ বরাবর ৫ বর্গ = ১ একক ধরে চিহ্নিত করি।

৪। নির্দিষ্ট তারিখের মৃত্যুসংখ্যা চিহ্নিত বিন্দুর সাথে ঐ তারিখ চিহ্নিত x অক্ষস্থ বিন্দু যোগ করি।

৫। একই পদ্ধতিতে দশদিনের জন্য দশটি দন্ড আঁকি।

দ্রষ্টব্য : 9 তারিখে দুর্ঘটনাজনিত কোন মৃত্যু না হওয়ায় উপরিউক্ত লেখচিত্রে 9 তারিখে কোন স্তম্ভ নেই। প্রকৃতপক্ষে 9 তারিখের স্তম্ভের দৈর্ঘ্য শূন্য। প্রত্যেক দিনের স্তম্ভের দৈর্ঘ্য ঐ দিনের মৃত্যুসংখ্যার সমানুপাতিক।

(গ) ঘটনসংখ্যা বা গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency polygon) ঃ সমান পরিসর বিশিষ্ট শ্রেণীবিভাজনের ক্ষেত্রে ঘটন বহুভুজ অঙ্কন পূর্বোক্ত লেখচিত্রের অনুরূপ পদ্ধতিতে আঁকা হয়। তবে এখানে প্রত্যেক শ্রেণীর মধ্যমান একটি চলক হিসেবে ধরা হয়।

সমস্যা নং ৩.৮	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ কোন কারখানায় কর্মরত 30 জন শ্রমিক কোন সপ্তাহে ওভারটাইমসহ নিম্নলিখিত বেতন পান ঃ

340, 152, 169, 265, 347, 790, 440, 467, 592, 373, 631, 733, 448, 475, 413, 507, 585, 597, 735, 738, 837, 487, 598, 638, 525, 885, 447, 592, 480.

প্রদত্ত তথ্য অবলম্বনে একটি ঘটন বহুভূজ আঁকতে হবে।

তত্ত্ব : পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় যে, $x_1 = 152, x_2 = 885$

মনে করি, শ্রেণী ব্যবধান $h = 150$

তাহলে, শ্রেণী সংখ্যা $k = \frac{885-152}{150} = 4.886$

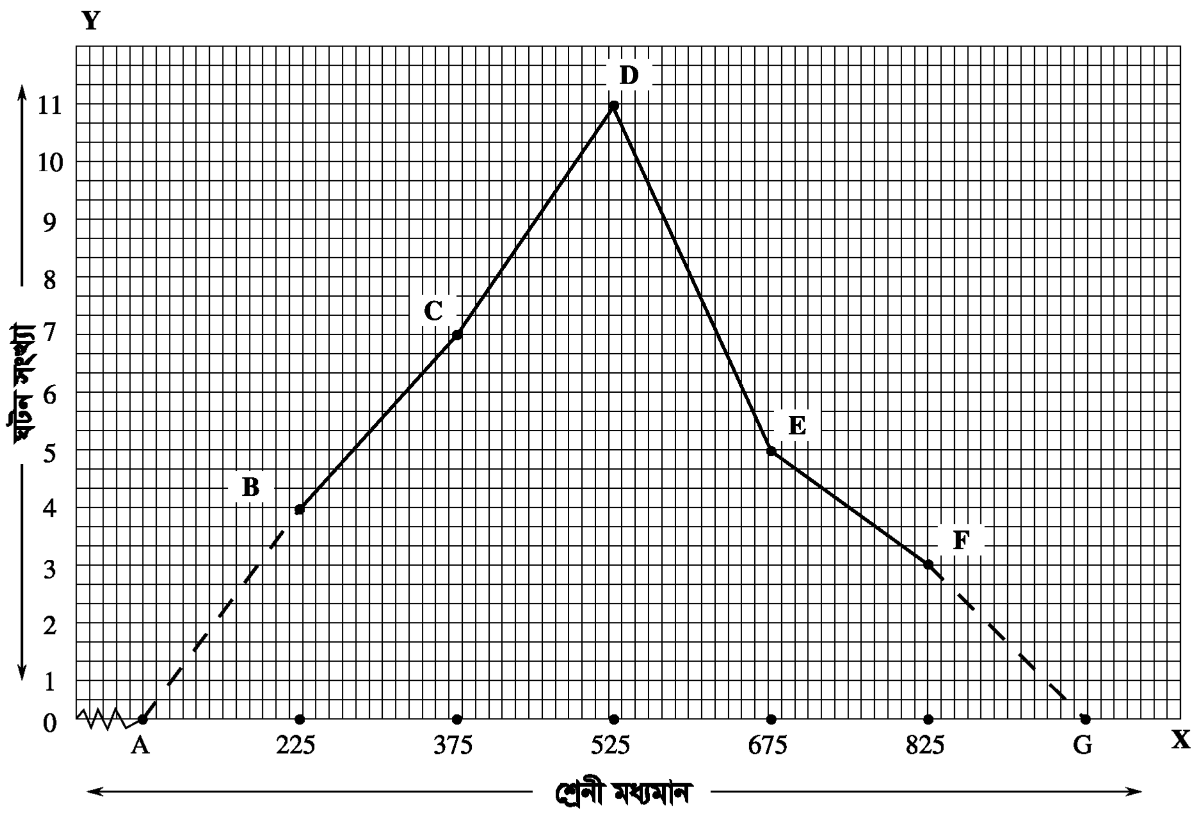
শ্রেনী সংখ্যা পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যা দরে, $k = 5$

কার্য পদ্ধতি :

১। শ্রেণী ব্যবধান 150 ও শ্রেণী সংখ্যা 5 ধরে নিম্ন ছক পূরন করি।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	**শ্রেণী মধ্যমান**	**টালি**	**ঘটনসংখ্যা (f)**
150 - 300	225	////	4
300 - 450	375	///// //	7
450 - 600	525	///// /// /	11
600 - 750	675	///// ///// /////	5
750 - 900	825	/////	3

২। x অক্ষ বরাবর এক বর্গ = 15 একক এবং y অক্ষ বরাবর পাঁচ বর্গ = 1 একক ধরি।



চিত্র : ১৩

৩। x অক্ষ বরাবর শ্রেণীর মধ্যমান ও y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা বিবেচনা করি।

৪। (225, 4), (375, 7), (525, 11), (675, 5), (825, 3) এবং বিন্দুগুলো স্থানাঙ্কায়িত করি।

৫। মনে করি, বিন্দুগুলো যথাক্রমে B, C, D, E, F ।

৬। বহুভুজের উভয়প্রান্ত সাধারণত x অক্ষের সাথে যুক্ত করা হয়। বহুভুজের প্রান্তদ্বয়কে x অক্ষে সংযুক্ত করার জন্য উভয়দিকে আর ও দুটি শ্রেণী কল্পনা করা হয়। তাই 150 - 300 এর পূর্ববর্তী শ্রেণীর মধ্য বিন্দু A (75) এবং 750 - 900 এর পরবর্তী শ্রেনীর মধ্যবিন্দু G (975) পর্যন্ত ভাঙা রেখা দ্বারা যুক্ত করে A B C D E F G গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকি।

(খ) বৃত্ত লেখ

সমস্যা নং ৩.৯	তারিখ ঃ

সমস্যা ঃ কোন পরিবার খাদ্যখাতে 2000.00 টাকা, ব্যস্তখাতে 500.00 টাকা, বাড়ি ভাড়া খাতে 500.00 টাকা, চিকিঃৎসা খাতে 750.00 টাকা, শিক্ষা খাতে 500.00 এবং অন্যান্য খাতে 250.00 টাকা ব্যয় করে। উপরিউক্ত তথ্য অবলম্বনে একটি বৃত্তলেখ আঁকতে হবে।

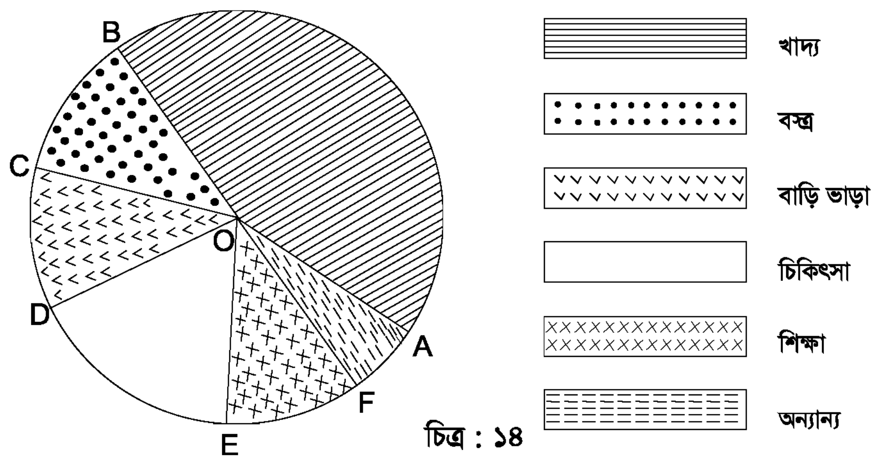
তত্ত্ব ঃ f = খাত ওয়ারী খরচের পরিমাণ এবং N = মোট খরচ হলে, বৃত্তলেখ অঙ্কনে বৃত্তের কেন্দ্রে খাতওয়ারী উৎপন্ন কোন $\theta = \frac{f}{N} \times 360$ [কোণ পরিমাপে চাঁদা ব্যবহার করতে হবে।]

কার্য পদ্ধতি :

১। প্রদত্ত তথ্য থেকে আমরা পাই মোট খরচ (N) = 4500 টাকা এবং তথ্য অনুযায়ী নিম্নের ছক প্রস্তুত করি।

খরচের খাত	খরচের পরিমাণ (টাকায়) (f)	মোট খরচ (টাকায়) (N)	কেন্দ্রে কোণের পরিমাণ (ডিগ্রিতে) (Q)
খাদ্য	2000	4500	160
বস্ত্র	500		40
বাড়ি ভাড়া	500		40
চিকিৎসা	750		60
শিক্ষা	500		40
অন্যান্য	250		20

২। যেকোন ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং বৃত্তের কেন্দ্র 0 চিহ্নিত করে যেকোন ব্যাসার্ধরেখা O A অঁকি।



চিত্র : ১৪

৩। খাদ্য খাতের জন্য $\angle AOB = 160^0$, বস্ত্রখাতের জন্য $\angle BOC = 40^0$, বাড়ি ভাড়া খাতের জন্য $COD = 40^0$, চিকিৎসা খাতের জন্য $\angle DOE = 60^0$, শিক্ষা খাতের জন্য $\angle EOF = 40^0$ কোণ আঁকি। তাহলে বৃত্তের কেন্দ্র অবশিষ্ট $\angle FOA = 20^0$ হবে এবং $\angle FOA$ দ্বারাই অন্যান্য খাতের খরচ সূচিত হবে।

সমস্যা নং ৩.১০ - ৩.১১	**তারিখ :**

(ক) কোন বিদ্যালয়ের 1991 সাল থেকে 1995 সাল পর্যন্ত মাধ্যমিক পরীক্ষায় শিক্ষার্থীদের পাশের হার নিম্নরূপ :

বৎসর	1991	1992	1993	1994	1995
পাশের হার	90	85	92	95	97

উক্ত তথ্য অবলম্বনে দন্ড চিত্র আঁকতে হবে।

(খ) কোন বিদ্যালয়ের 100 জন শিক্ষার্থীর ভূগোল পরীক্ষার নম্বর নিম্নরূপ :

প্রাপ্ত নম্বর	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
শিক্ষার্থী	15	18	20	35	8	4

উপাত্তগুলো অলম্বনে একটি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকতে হবে।

সমস্যা নং ৩.১২ - ৩.১৩	**তারিখ :**

(ক) কোন বছরে বাংলাদেশের 10 জন রপ্তানিকারক যথাক্রমে 825, 935, 1020, 1125, 975, 1060, 1280, 990, 892, 1180 টন চিংড়ি মাচ রপ্তানি করেন।

উপরিউক্ত তথ্যকে দন্ড চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) 50 জন লোকের ওজন আসন্ন কিলোগ্রামে নিম্নরূপ ঃ

30, 35, 32, 30, 40, 41, 31, 45, 36, 43, 44, 47, 37, 50, 49, 47, 51, 52, 35, 40, 39, 48, 43 52, 37, 46, 45, 48, 42, 51, 50, 51, 43, 53, 55, 47, 43, 38, 49, 50, 45, 39, 42, 43, 45, 47, 35, 38, 49, 46.

উপরিউক্ত তথ্যের সাহায্যে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

সমস্যা নং ৩.১৪ - ৩.১৫	**তারিখ :**

(ক) একটি পুস্তকের দোকানে সপ্তাহের ৬ দিনে বিক্রিত পুস্তকের সংখ্যা নিম্নরূপ :

দিন :	1	2	3	4	5	6
বিক্রিত পুস্তক সংখ্যা :	90	85	70	98	80	95

দন্ডচিত্রের সাহায্যে তথ্যটি প্রকাশ কর।

(খ) কোন বিদ্যালয়ে বিষয়ভিত্তিক সাপ্তাহিক পাঠদান সূচি নিম্নরূপ ছিল ঃ

বিষয় :	বাংলা	ইংরেজি	গণিত	বিজ্ঞান	সমাজবিজ্ঞান	অন্যান্য
পাঠদান ঘন্টা :	4	8	5	6	3	10

তথ্যটি বৃত্তলেখ দ্বারা প্রকাশ কর।

সমস্যা নং ৩.১৩ - ৩.১৭	**তারিখ :**

(ক) কোন বছরে মাসওয়ারী চিনির গড় দাম প্রতি কেজি নিম্নরূপ ছিল :

মাস :	জানুয়ারি	ফেব্রুয়ারি	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন
দাম :	23.50	23.00	23.75	24.35	24	25.25

জুলাই	আগস্ট	সেপ্টেম্বর	অক্টোবর	নভেম্বর	ডিসেম্বর
25.75	26	26.25	27.75	23.75	25

প্রদত্ত তথ্য অবলম্বনে দন্ড চিত্র আঁক।

(খ) বাংলাদেশ জাতীয় ফুটবল দলের প্রশিক্ষণের জন্য সারাদেশের সেরা 24 জন খেলোয়াড় বাছাই করা হল। দেখা গেল, ঢাকা বিভাগ থেকে 7 জন, চট্টগ্রাম বিভাগ থেকে 4 জন, রাজশাহী বিভাগ থেকে 5 জন, খুলনা বিভাগ থেকে 4 জন, বরিশাল বিভাগ থেকে 1 জন এবং সিলেট বিভাগ থেকে 3 জন নির্বাচিত হয়েছে উপাত্তগুলো বৃত্তলেখের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমস্যা নং ৩.১৮ - ৩.১৯	**তারিখ :**

(ক) কোন বছরে একটি দেশের বিভিন্ন খাতে বাজেট বরাদ্দ নিম্নরূপ ছিল :

খাদ্য **20%**, স্বাস্থ্য ও চিকিৎসা **25%**, শিক্ষা **30%**, যোগাযোগ **15%** ও অন্যান্য **10%**।

উপাত্তগুলো অবলম্বনে বৃত্তলেখ অঙ্কন কর। (খ) পৃথিবীর মোট জনসংখ্যা **20** শতাংশ আমেরিকায়, **25** শতাংশ ইউরোপে, **35** শতাংশ এশিয়ায়, **15** শতাংশ আফ্রিকায় এবং **5** শতাংশ অস্ট্রেলিয়ায় বাস করে। মহাদেশওয়ারী জনসংখ্যা বৃত্তলেখ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

৩.৩ গড়, মধ্যক, প্রচুরক

সমস্যা নং ৩.২০	তারিখ :

সমস্যা ঃ রাস্তা নির্মাণে কর্মরত 50 জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি টাকায় দেওয়া হল।

176, 126, 118, 124, 125, 101, 112, 91, 134, 157, 135, 104, 115, 138, 178, 159, 90, 178, 155, 180, 137, 149, 179, 168, 142, 123, 138, 95, 105, 113, 98, 160, 107, 174, 119, 164, 93, 154, 170, 144, 155, 165, 147, 120, 129, 139, 117, 140, 128, 151.

উপরিউক্ত তথ্য থেকে ঃ

(ক) গড় নির্ণয় করতে হবে।

(খ) মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

(গ) প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

(ঘ) আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব :

মনে করি, প্রদত্ত উপাত্তগুলোর সর্বনিম্ন মান $= x_1$

এবং সর্বোচ্চ মান $= x_2$

$\therefore$ পরিসর $= x_2 - x_1$

মনে করি, শ্রেণী ব্যবধান $= h$

$\therefore$ শ্রেণী সংখ্যা $k = \dfrac{x_2 - x_1}{h}$

মনে করি, গড় $= \bar{x}$

নির্বাচিত শ্রেণী মধ্যমান = অনুমতি গড় $= a$

এবং $u = \dfrac{x-a}{h}$

তাহলে, $\bar{x} + = a + h\,\bar{u}$

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। প্রদত্ত উপাত্তগুলো থেকে পাই, $x_1 = 90, x_2 = 180.$

২। মনে করি, শ্রেণী ব্যবধান $h = 15$

৩। শ্রেণী সংখ্যা $k = \dfrac{x_2 - x_1}{h} = \dfrac{180 - 90}{15} = \dfrac{90}{15} = 6$

৪। শ্রেণী সংখ্যা 7 ধরে প্রথম শ্রেণীটি 88 থেকে শুরু করে 15 শ্রেণী ব্যবধান ধরে শ্রেণী ব্যাপ্তি, প্রকৃত শ্রেণীসীমা, টালি, ঘটনসংখ্যা বা গনসংখ্যা, শ্রেণী মধ্যবিন্দু ও ক্রমযোজিত ঘটনসংখ্যা নিয়ে নিচের ছকটি তৈরি করি।

৫। উপরিউক্ত তত্ত্ব অবলম্বনে নিম্নের ছক তৈরি করি।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	প্রকৃত শ্রেণী সীমা	ঘটনসংখ্যা f	শ্রেণী মধ্যবিন্দু x	a	$u = \frac{x-a}{h}$	f u	ক্রমযোজিত ঘটনসংখ্যা F
88 - 102	87.5 -102.5	6	95		-3	-18	6
103 - 117	102.5 -117.5	7	110		-2	-14	13
118 - 132	117.5 -132.5	9	125		-1	-9	22
133 - 147	132.5 -147.5	10	140	140	0	0	32
148 - 162	147.5 -162.5	8	155		1	8	40
163 - 177	162.5 -177.5	6	170		2	12	46
178 -192	177.5 -192.5	4	185		3	12	50

দ্রষ্টব্য ঃ ওপরের ছকের শ্রেণী গুলো বিচ্ছিন্ন। শ্রেণীগুলোকে অবিচ্ছিন্ন করার জন্য প্রকৃত শ্রেণী সীমা নির্ণয় করে নেওয়া হয়েছে।

(ক) গড় নির্ণয় পদ্ধতি :

৮। উপরিউক্ত তত্ত্বানুসারে, গড় $\bar{x} = a + \frac{\sum f u}{n} \times h$

গড় $x = 140 + \frac{-9}{50} \times 15 = 140 - 2.7 = 137.3$

(খ) মধ্যক নির্ণয় পদ্ধতি

১। পরবর্তী তত্ত্ব ও কার্য পদ্ধতি :

গণসংখ্যার সমষ্টি = n

মধ্যমা শ্রেণীর নিম্নসীমা = L_m

মধ্যমা শ্রেণীর শ্রেণীব্যাপ্তি = h_m

মধ্যমা শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা = f_m

মধ্যমা শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর ক্রম যোজিত ঘটনসংখ্যা বা গনসংখ্যা = F_m

তাহলে, মধ্যক = $L_m + \dfrac{\frac{n}{2} - Fm}{fm} \times hm$

৩। উক্ত তত্ত্বানুসারে মধ্যক নির্ণয় করি।

এখানে তৃতীয় শ্রেণীর যোজিত ঘটনসংখ্যা 22, চতুর্থ শ্রেণীর যোজিত ঘটনসংখ্যা 32

$\therefore$ অর্থাৎ (133 - 147) শ্রেণীটি মধ্যক শ্রেনীর $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$ তম মানটি চতুর্থ শ্রেণীর অর্ন্তভুক্ত।

(133 - 147) শ্রেনীটির প্রকৃত শ্রেনীসীমা হলো (132.5 - 147.5)

$\therefore$ $L_m = 132{\cdot}5$ (চতুর্থ শ্রেণীর প্রকৃত নিম্নসীমা)

$h_m = 15$

$f_m = 10$ (মধ্যক শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা)

$f_m = 22$

মধ্যক = $132.5 + \dfrac{\frac{50}{2} - 22}{10} \times 15 = 132.5 + \dfrac{3 \times 15}{10}$

$= 132.5 + 4.5 = 137$

(গ) প্রচুরক নির্ণয় পদ্ধতি

১। তত্ত্ব ও কার্যপদ্ধতি

মনে করি, প্রচুরক শ্রেণী নিম্নসীমা = L

প্রচুরক শ্রেণীর শ্রেণী ব্যাপ্তি = h

প্রচুরক শ্রেনী ও তার আগের শ্রেণীর ঘটন সংখ্যার পার্থক্য = $\triangle 1$

প্রচুরক শ্রেণী ও তার পরের শ্রেণীর ঘটন সংখ্যার পার্থক্য = $\triangle 2$

তাহলে, প্রচুরক = $L + \dfrac{\triangle 1}{\triangle_1 + \triangle_2} \times h$

৩। পর্যবেক্ষণ করে দেখি, প্রদত্ত উপাত্তগুলোর মধ্যে 132.5-147.5 শ্রেণীর গণসংখ্যা সর্বোচ্চ।

সুতরাং প্রচুরক শ্রেনী হচ্ছে 132.5 - 147.5 শ্রেণী অর্থাৎ ঐ শ্রেনীতে প্রচুরক অবস্থিত।

৪। $L = 132.5$ $h = 15$ $\triangle_1 = 10 - 99 = 1, \triangle_2 = 10 - 8 = 2$ নির্ণয় করি।

৫। তাহলে, প্রচুরক = $132.5 + \dfrac{1}{1+2} \times 15 = 132.5 + 5 = 137.5$

(ঘ) আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয় পদ্ধতি

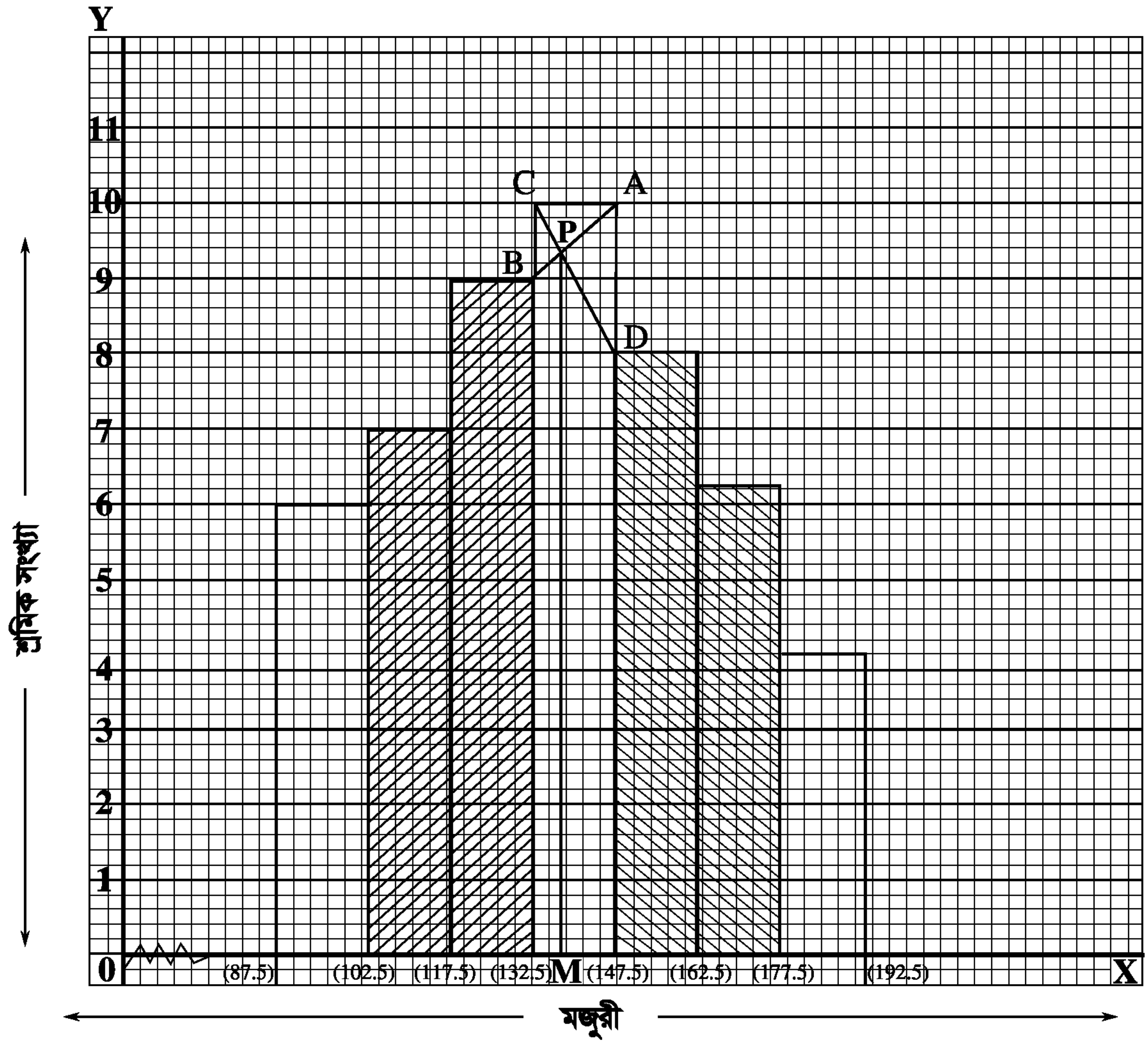
১। প্রদত্ত উপাত্তগুলো থেকে ১ নং ছকটি তৈরি করি।

২। ১নং ছক থেকে দেখি যে, 132.5 - 147.5 শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা সবচেয়ে বেশি।

৩। গ্রাফ কাগজ নিয়ে x অক্ষ বরাবর পাঁচ বর্গ = 15 একক অর্থাৎ এক বর্গ = 3 একক ধরি।

৪। y অক্ষ বরাবর পাঁচ বর্গ = 1 একক ধরি।

৫। x অক্ষ বরাবর প্রকৃত শ্রেণী সীমা (মজুরি) ও y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা (শ্রমিক সংখ্যা) পরিমাপ করে নিম্নের আয়তলেখটি অঙ্কন করি।



চিত্র : ১৫

৬। 132.5 - 147.5 শ্রেণীর আয়তক্ষেত্রটি সবচেয়ে উঁচু সুতরাং এই শ্রেণীটি হলো প্রচুরক শ্রেণী।

৭। প্রচুরক শ্রেণীর সর্বোচ্চ সীমার কোটির শীর্ষবিন্দুর সঙ্গে পূর্ববর্তি শ্রেণীর সর্বোচ্চ কোটির শীর্ষবিন্দু একটি রেখা দ্বারা যুক্ত করি। অর্থাৎ A, B যোগ করি। আবার প্রচুরক শ্রেণীর সর্বনিম্ন সীমার (কোটির) শীর্ষবিন্দুর সঙ্গে প্রচুরক শ্রেণীর পরবর্তি শ্রেণীর নিম্নসীমার কোটির শীর্ষবিন্দু যুক্ত করি। অর্থাৎ C, D যোগ করি ।

৮। এভাবে অঙ্কিত A B ও C D রেখা দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

৯। P বিন্দু থেকে X অক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি।

তাহলে, M বিন্দুর অবস্থানই প্রচুরক নির্দেশ করে।

ফল সংকলন ঃ

এখানে M বিন্দু 132.5 এর পর 1.5 বর্গ দূরে অবস্থান করে।

$\therefore$ প্রচুরক = 132.5 + 1.5 x 3 = 132.5 + 4.5 = 137

সমস্যা নং ৩.২১	তারিখ :

ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ে কোন একটি বিভাগে অনার্স প্রথম বর্ষে ভর্তির জন্য আবেদনকারী ১২০ জন ভর্তি প্রার্থীর উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষার মোট নম্বরের বিন্যাস ছক দেওয়া হল। ঐ ছক থেকে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় কর। আবার আয়তলেখ অঙ্কন করে প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

প্রাপ্ত নম্বর	প্রার্থী সংখ্যা
501-550	13
551-600	30
601-650	40
651-700	18
701-750	12
751-800	7

সমস্যা নং ৩.২২	তারিখ :

ঢাকা শহরে ৫০ জন রিকশা চালকের উপর জরিপ করে দেখা গেল তাদের গড় দৈনিক আয় নিম্নরূপ ঃ

150, 125, 148, 75, 81, 104, 94, 88, 98, 146, 105, 127, 104, 91, 94, 85, 104, 108, 145, 129, 125, 117, 99, 87, 98, 121, 110, 109, 90, 135, 98, 107, 119, 93, 140, 114, 124, 134, 144, 130, 95, 84, 103, 97,108, 128, 112, 119, 149, 107.

উপাত্তগুলো শ্রেণী বিন্যাস করে গড়, মধ্যক, প্রচুরক নির্ণয় কর। আবার আয়তলেখ অঙ্কন করে প্রচুরক নির্ণয় কর।

নমুনা সমস্যা

সমস্যা নং ৩.২৩	তারিখ :

সমস্যা ঃ প্রদত্ত তথ্যকে বৃত্তলেখ দ্বারা উপস্থাপন

সমস্যা ঃ কোন বিদ্যালয়ে বিষয়ভিত্তিক সাপ্তাহিক পাঠদান সূচি নিম্নরুপ ছিল ঃ

বিষয় বাংলা	ইংরেজি	গণিত	বিজ্ঞান	সমাজ	বিজ্ঞান	অন্যান্য
পাঠদান ঘণ্টা	4	8	5	6	3	10

তথ্যটি বৃত্তলেখ দ্বারা উপস্থাপন করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ f = প্রতিটি বিষয়ে পাঠদানের সময় (ঘণ্টায়)

N = মোট পাঠদানের সময় (ঘণ্টায়)

$= 4 + 8 + 5 + 6 + 3 + 10 = 36$ ঘণ্টা

$\therefore$ উৎপন্ন কোণ, $\theta = \frac{f}{N} \times 360^0$

উপকরণ ঃ

১। সরু করে কাটা একটি পেন্সিল

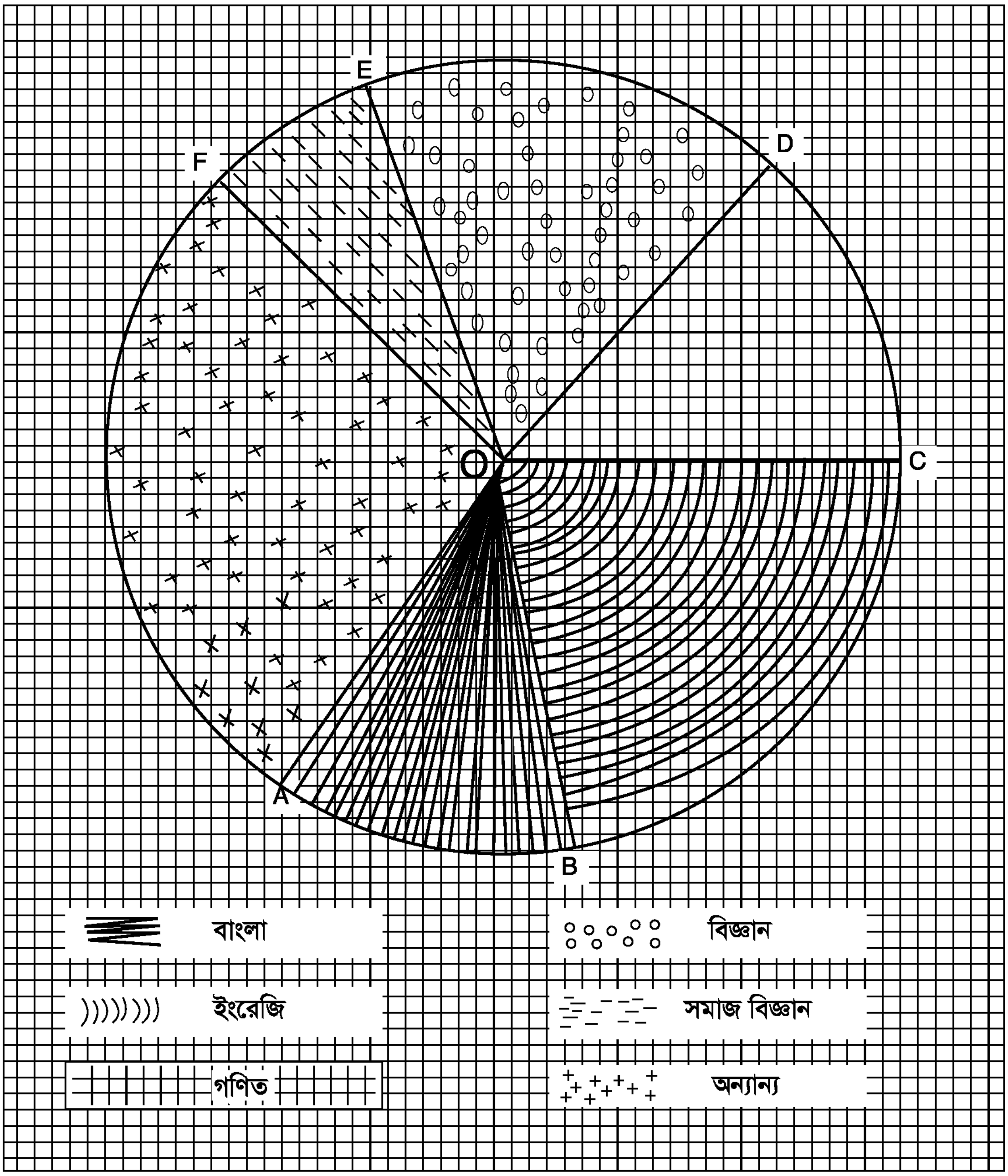
২। চাঁদা

৩। স্কেল

৪। পেন্সিল কম্পাস

৫। রাবার

৬। ছক কাগজ ইত্যাদি।



কাজের ধারা ঃ

১. প্রদত্ত তথ্য থেকে নিচের ছকটি তৈরি করি ঃ

বিষয়	**পাঠদান (ঘণ্টায়)**	**মোট সময় (ঘণ্টায়)**	**কোণ (ডিগ্রিতে)**
বাংলা	4	36	40^0
ইংরেজি	8		80^0
গণিত	5		50^0
বিজ্ঞান	6		60^0
সমাজবিজ্ঞান	3		30^0
অন্যান্য	10		100^0

২. যেকোন ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্তের কেন্দ্র O চিহ্নিত করি এবং যেকোন ব্যাসার্ধের OA আঁকি।

৩. $\angle AOB = 40^0$ দ্বারা বাংলা, $\angle BOC = 80^0$ দ্বারা ইংরেজি, $\angle COD = 50^0$ দ্বারা গণিত, $\angle DCE = 60^0$ দ্বারা বিজ্ঞান, $\angle EOF = 30^0$ দ্বারা সমাজবিজ্ঞান এবং $\angle FOA = 100^0$ দ্বারা অন্যান্য নম্বর সূচিত করলাম।

সতর্কতা ঃ ১। চাঁদা দিয়ে কোণ অঙ্কনে সাবধানতা অবলম্বন করি।

২। বিভিন্ন চিহ্ন দ্বারা বৃত্তলেখের অভ্যন্তরে সর্তকতার সাথে বিভিন্ন বিষয় চিহ্নিত করি।

চতুর্থ অধ্যায়
জ্যামিতিক অঙ্কন

৪.১। আনুপাতিক অঙ্কন

ব্যবহারিক জীবনে গণিতের বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে জ্যামিতিক আকারের বিভিন্ন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বা কোন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় করা হয়। কোন কোন সময় চিত্রাঙ্কন ব্যতীত ক্ষেত্রফল বা আয়তন নির্ণয় সম্ভব হয় না। তাই বৃহদাকারে বস্তুর আনুপাতিক চিত্রাঙ্কন প্রয়োজন হয়। আনুপাতিক চিত্রাঙ্কনে নির্দিষ্ট স্কেল ব্যবহার করা হয়। কোন আয়তকার জমির দৈর্ঘ্য 207 মিটার এবং প্রস্থ 153 মিটার হলে সাধারণভাবে ব্যবহৃত কাগজে 207 মিটার দীর্ঘ কোন সরলরেখা অঙ্কন সম্ভব নয় বিধায় অঙ্কন কাজে ব্যবহৃত স্কেলের 1 সে.মি. = 10 মিটার ধরা যেতে পারে। এই 1 সে. মি. = 10 মিটারকেই স্কেল বলা হয়। আবার 1 সে. মি. = 20 মিটারও ধরা যায়। কিন্তু স্কেল নির্বাচনের ক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে আমরা যে স্কেলদন্ড ব্যবহার করি তার সাহায্যে এ সেন্টিমিটার এক দশমাংশ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর দৈর্ঘ্য সঠিকভাবে পরিমাপ সম্ভব নয়। যদি 1 সে. মি. = 20 মিটার স্কেল বলা হয়, তাহলে 207 মিটার = 10.35 সে. মি. হবে, কিন্তু 10.35 সে. মি. সঠিকভাবে পরিমাপ সহজসাধ্য নয়, তাই এক্ষেত্রে স্কেল 1 সে. মি. = 10 মিটার ধরলে উপরিউক্ত জমির আনুপাতিক দৈর্ঘ্য 20.7 সে. মি. এবং প্রস্থ 15.3 সে. মি. হবে।

যে কোন সুবিধামত স্কেলে কোন চিত্র অঙ্কনের পর ঐ চিত্রের নিচে স্কেল উল্লেখ অবশ্যই করতে হবে। পরবর্তী উদাহরণের স্কেল নির্বাচন, চিত্রাঙ্কন এবং ব্যবহারিক খাতায় লিপিবন্ধকরণ পদ্ধতি দেখানো হল। যে কোন জ্যামিতিক অঙ্কনের জন্য নিম্নোক্ত উপকরণগুলো সঙ্গে রাখতে হবে।

১। সরু করে কাটা একটি কাঠ পেন্সিল।
২। একটি পেন্সিল কাটার ও এক টুকরো রাবার।
৩। একটি স্কেল, অনূর্ধ ছয় ইঞ্চি দীর্ঘ যার সাহায্যে ইঞ্চি বা সেন্টিমিটারের স্কেলে পরিমাপ করা যায়।
৪। একটি চাঁদা, তবে কোনরূপ নির্দেশ না থাকলে চাঁদা ব্যবহার করা যাবে না।
৫। একটি পেন্সিল কম্পাস ও একটি কাটা কম্পাস।
৬। একটি কালি কলম বা বলপয়েন্ট কলম।

অঙ্কন পদ্ধতি সম্পর্কে বিশেষ নির্দেশ ঃ

যে কোন জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনে কিছু তথ্য অবশ্যই দেওয়া থাকবে। প্রদত্ত তথ্যগুলো যেমন ত্রিভুজের দুইটি বাহু একটি কোণ বা ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু ও সংলগ্ন কোণ বা অনুরূপ যে কোন প্রদত্ত তথ্য অনুসারে কোণ, রেখা বা অন্য কোন জ্যামিতিক ক্ষেত্র অঙ্কন কাজের জন্য ব্যবহৃত কাগজের উপরের দিকে ডানপাশে বা বামপাশে চিত্রাকারে স্থাপন করতে হবে এবং এই প্রদত্ত তথ্যগুলোকে ভিত্তি করেই নির্ণেয় চিত্র অঙ্কন করতে হবে। প্রদত্ত জ্যামিতিক তথ্য (বা উপাত্ত যেমন রেখাংশ কোণ) আগে (স্কেল বা কম্পাসের সাহায্য) এঁকে নিয়ে প্রথমে সমাধান করতে হবে।

পরবর্তী কিছু উদাহরণে অঙ্কন পদ্ধতি, চিত্র ও ব্যবহারিক খাতায় শ্রেণী কাজ লিপিবদ্ধকরণ পদ্ধতি দেখানো হয়েছে। যেগুলো অঙ্কন পদ্ধতির কেবলমাত্র সংকেত দেওয়া আছে সেগুলো উদাহরণের অনুরূপ পদ্ধতিতে অঙ্কন করতে হবে এবং একই পদ্ধতিতে ব্যবহারিক খাতায় লিপিবদ্ধ করতে হবে।

ব্যবহারিক খাতার জন্য কিছু নম্বর নির্ধারিত থাকে, তাই নিয়মিত শ্রেণী কাজ লিপিবদ্ধ করা, পরিচ্ছন্নভাবে স্পষ্টাক্ষরে লেখা এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে সুস্পভাবে অঙ্কনের ব্যাপারে সতর্ক থাকা দরকার।

সমস্যা নং ৪.১	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ 65 মিটার, 57 মিটার ও 50 মিটার দীর্ঘ বাহু বিশিষ্ট একখন্ড ত্রিভুজাকার জমির আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ একটি সরু করে কাটা পেন্সিল, স্কেল, পেন্সিল কম্পাস, রাবার।

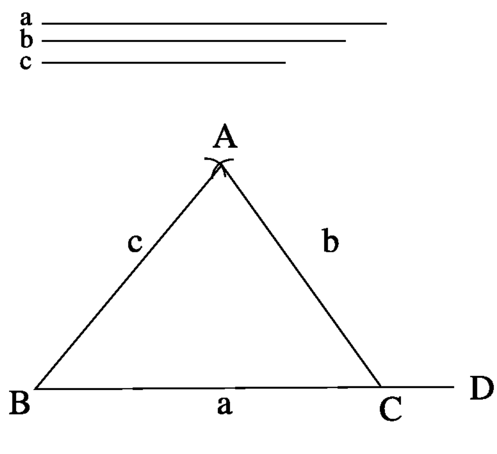
অঙ্কন ঃ

১। মনে করি, স্কেল 1 সে. মি. = 10 মিটার। তাহলে, আনুপাতিক চিত্রের বাহুগুলো 6.5 সে. মি. 5.7, সে. মি. এবং 5 সে. মি. হবে।

২। স্কেলের সাহায্যে a = 6.5 সে. মি, b = 5.7 সে .মি, c = 5 সে. মি. দীর্ঘ তিনটি রেখাংশ আঁকি।

৩। BD রেখাংশ থেকে BC = a কেটে নিই। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে c ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।

৪। আবার C বিন্দুকে কেন্দ্র করে b ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।



স্কেল : 1 সে: মি: = 10 মিটার

৫। উপরিউক্ত দুইটি বৃত্তচাপ পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৬। AB ও AC যোগ করি। তাহলে, ABC ত্রিভুজক্ষেত্রটিই প্রদত্ত জমিরখন্ডের আনুপাতিক চিত্র হবে।

সমস্যা নং ৪.২	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ

১। 68 মিটার দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের যে কোন একটি বাহুর সাথে বাইরে 44 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র সংযুক্ত আছে। সমগ্র ক্ষেত্রটির আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করতে হবে।

২। যে বাগানের দৈর্ঘ্য 63 মিটার, প্রস্থ 35 মিটার এবং যার ভিতরে চতুর্দিকে 3.5 মিটার প্রশস্থ রাস্তা আছে তার একটি আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করতে হবে। রাস্তাটি পৃথকভাবে চিহ্নিত করতে হবে এবং রাস্তার ক্ষেত্রফলও নির্ণয় করতে হবে।

৩। 108 মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করতে হবে।

৪। 48 মিটার দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি একখন্ড জমির যে কোন এক বাহুর সঙ্গে বাইরের দিকে বর্গাকার একখন্ড জমি সংযুক্ত আছে। সমগ্র ক্ষেত্রটির একটি আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করতে হবে।

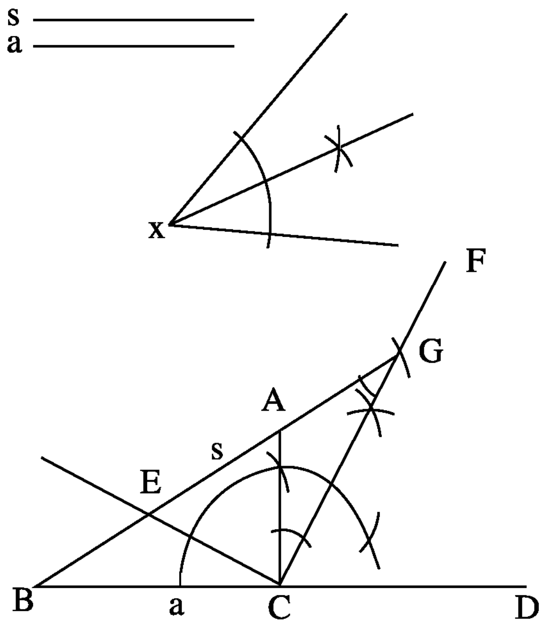
৫। চতুর্ভূজাকৃতি একখন্ড জমির 130 মিটার দীর্ঘ কর্ণের এক পাশের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 120 মিটার ও 50 মিটার এবং অপরপাশের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 100 মিটার ও 70 মিটার। জমি খন্ডের একটি আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করতে হবে।

৪.২। ত্রিভুজ, চতুর্ভূজ ও বৃত্ত সংক্রান্ত জ্যামিতিক চিত্রাঙ্কন

সমস্যা নং ৪.৩	তারিখ :

সমস্যা ঃ কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

তত্ত্ব ঃ ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া থাকলে ত্রিভুজটি অনন্য ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব।



অঙ্কন ঃ

১। মনে করি, ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য = a ভূমির সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর $\angle x$ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s দেওয়া আছে।

২। যে কোন BD রেখাংশ থেকে BC = a অংশ কেটে নিই।

৩। BC এর C প্রান্তে $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle x$ আঁকি।

৪। C বিন্দুতে CE এর উপর CF লম্ব আঁকি।

৫। B কে কেন্দ্র করে s এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন তা CF কে এ বিন্দুতে ছেদ করে।

৬। $\angle CGB$ এর সমান করে C বিন্দুতে $\angle GCA$ আঁকি যেন CA রেখা BG কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ ঃ $\angle ECG = 90^0 \therefore \angle AEC + \angle AGC = 90^0$

আবার, $\angle AGC = \angle ACG$ (অঙ্কনানুসারে) $\therefore \angle ACE = \angle AEC$

$$\angle ACB - \angle ABC = \angle ACE + \angle BCE - (\angle AEC - \angle BCE)$$

$$= 2\angle BCE = 2\frac{1}{2}\angle x = \angle x$$

এছাড়া $BC = a$

$\angle ACG = \angle ACG \quad \therefore AC = AG$

$\therefore BG = BA + AG = BA + AC = s.$

$\therefore$ ABC - ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সমস্যা নং ৪.৪	তারিখ :

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত তথ্য সম্বলিত ত্রিভুজগুলো অঙ্কন করতে হবে। (স্কেল ব্যবহার করে প্রদত্ত রেখাংশ ও চাঁদা ব্যবহার করে প্রদত্ত কোণগুলো এঁকে নিতে হবে।)

১। ভূমি 14 সে. মি. ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 20^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 16.8 সে. মি.

২। ভূমি 16 সে. মি., ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 30^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 21.5 সে. মি.

৩। ভূমি 18 সে. মি., ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 15^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 22 সে. মি.।

সমস্যা নং ৪.৫	তারিখ :

সমস্যা ঃ কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

[অঙ্কন সংকেত ঃ মনে কর ভূমির দৈর্ঘ্য = a, [ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর $\angle x$ এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর d দেওয়া আছে।]

১। যেকোন BD রেখাংশ থেকে BC = a অংশ কেটে নিয়ে C বিন্দু $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle x$ আঁকি।

২। B কে কেন্দ্র করে d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন তা EC কে M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। BN যোগ করে F পর্যন্ত বর্ধিত কর।

৪। $\angle FNC$ এর সমান করে C বিন্দুতে $\angle NCA$ আঁকি।

তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সমস্যা নং ৪.৬	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত তথ্য সম্বলিত ত্রিভুজগুলো অঙ্কন করতে হবে। (স্কেল ব্যবহার করে প্রদত্ত রেখাংশ ও চাঁদা ব্যবহার করে প্রদত্ত কোণগুলো এঁকে নিতে হবে।)

১। ভূমি 19.6 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 30^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর 11.7 সে. মি.

২। ভূমি 14 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 20^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর 11.0 সে. মি.

৩। ভূমি 15 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 15^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর 9.0 সে. মি.

সমস্যা নং ৪.৭	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ কোন ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর দুই বাহুর অনুপাত দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন সংকেত ঃ মনে কর ভূমির দৈর্ঘ্য = a, শিরঃকোণ $\angle x$ এবং অপর বাহুদ্বয়ের অনুপাত m ঃ n

১। m ও n দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি রেখাংশ নাও। যেকোন BD রেখাংশ থেকে BP = m অংশ কেটে নাও।

২। BP এরা P প্রান্তে $\angle BPE = \angle x$ আঁকি এবং PE থেকে PR = n অংশ কেটে নাও।

৩। BR যোগ করে তাকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং BF থেকে BC = a অংশ কেটে নাও।

৪। C বিন্দুতে CA।। BP আঁক যেন তা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ABC ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সমস্যা নং ৪.৮	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত তথ্য সমবলিত ত্রিভুজগুলো অঙ্কন করতে হবে। (স্কেল ব্যবহার করে প্রদত্ত রেখাংশ ও চাঁদা ব্যবহার করে প্রদত্ত কোণগুলো এঁকে নিতে হবে।

১। ভূমি 12.5 সে. মি, শিরঃকোণ 30^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের অনুপাত 5 ঃ 7.

২। ভূমি 9.4 সে. মি. শিরঃকোণ 80^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের অনুপাত 7 ঃ 10.

৩। ভূমি 14.8 সে. মি., শিরঃকোণ 45^0 এবং অপর বাহুদ্বয়ের অনুপাত 12 ঃ 13

সমস্যা নং ৪.৮	**তারিখ :**

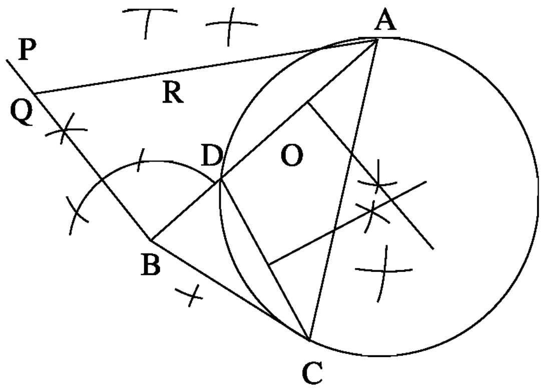
সমস্যা ঃ এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকতে হবে যার ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় প্রত্যেকেই শিরঃকোণের দ্বিগুণ।

অঙ্কন ঃ

১। যে কোন AB রেখাংশ নিই এবং O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করি।

২। AB এর B প্রান্ত AB এর সাথে লম্ব BP আঁকি।

৩। BPথেকে $BQ = \frac{1}{2}$ AB কেটে নিই
এবং AQ যোগ করি।
৪। AQ থেকে $QR = \frac{1}{2}$ AB অংশ কেটে
নিই এবং AB থেকে AR = AD অংশ
কেটে নিই।
৫। B ও D কে কেন্দ্র করে AD এর সমান
ব্যাসার্ধ নিয়ে, AB এর যে পাশে AQ তার
বিপরীত পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন
তারা C বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।



চিত্র : ১৮

প্রমাণ ঃ $\triangle$ ABC এর পরিবৃত্ত আঁকি।
অঙ্কনানুসারে, AD = CD = BC.
$\therefore \angle ACD = CAB$
অঙ্কনাননসারে, $AD^2 = AB.\ BD = BC^2$
$\therefore$ BC, ACD বৃত্তের স্পর্শক।
$\angle BCD$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle CAD$.
আবার $\angle BDC = 2\angle CAD = 2\angle BAC$
$\therefore BC = CD \therefore \angle BDC = \angle DBC$
বা, $2\angle BCD = \angle DBC = \angle ABC$
আবার $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = \angle CAD + \angle CAD$.
$= 2\angle CAD = 2\angle BAC = \angle ABC$.
$\therefore AB = AC$
$\therefore$ ABC নির্ণেয় সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সমস্যা নং ৪.১০	তারিখ :

সমস্যা ঃ কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও ঐ কোণ সংলগ্ন অপর বাহু ও উচ্চতার সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন সংকেত ঃ মনে কর ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন কোণ $\angle x$ ও ঐ কোণ সংলগ্ন অপর বাহু ও উচ্চতার সমষ্টি s.

১। যেকোন XY রেখাংশ নাও এবং তার যে কোন P বিন্দুতে $PQ \perp XY$ আঁক।

২। PQ হতে PD = s অংশ কেটে নাও এবং D বিন্দুতে $\angle x$ এর পূরক কোণের অর্ধেকের সমান করে $\angle PDB$ আঁক যেন DB রেখা XY কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। আবার B বিন্দুতে $\angle DBA = \angle PDB$ আঁক যেন BA রেখা PD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। BY হতে BC = a অংশ কেটে নাও এবং AC যোগ কর।

তাহলে, ABC ত্রিভুজ নির্ণেয় ত্রিভুজ নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সমস্যা নং ৪.১১	তারিখ :

সমস্যা ঃ নিচে প্রদত্ত তথ্য সম্বলিত ত্রিভুজগুলো অঙ্কন করতে হবে।

১। ভূমি 14 সে. মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60^0 এবং ঐ কোণ সংলগ্ন অপর বাহু ও উচ্চতার সমষ্টি 24.8 সে. মি।

২। ভূমি 16 সে. মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 45^0 এবং ঐ কোণ সংলগ্ন অপর বাহু ও উচ্চতার সমষ্টি 21.0 সে.মি.।

৩। ভূমি 15 সে. মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 30^0 এবং ঐ কোণ সংলগ্ন অপর বাহু ও উচ্চতার সমষ্টি 19.8 সে. মি.।

সমস্যা নং ৪.১২	তারিখ :

সমস্যা ঃ কোণ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র আঁকতে হবে।

১। যেকোন ABCD চতুভুর্জ নাও এবং ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ADX ত্রিভুজ ক্ষেত্র আঁক।

২। D হতে AX এর উপর লম্ব আঁক যেন ঐ লম্ব AX কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। DP এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় কর এবং O বিন্দু দিয়ে AX এর সমান্তরাল YZ রেখাংশ আঁক।

৪। A ও X হতে YZ-এর উপর AL ও BM লম্ব আঁক যেন তারা YZ কে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ALMX আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ADX ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

৫। ALMX আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র আঁকতে হবে।

৬। LM কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন ME = MX হয়।

৭। LE কে ব্যাস ধরে একটি অর্ধবৃত্ত আঁক।

৮। XM কে বর্ধিত কর যেন তা অর্ধবৃত্তকে N বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, MN নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের বাহু।

৯। MN কে বাহু ধরে MNUV বর্গক্ষেত্র আঁক। তাহলে MNUV নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

সমস্যা নং ৪.১৩	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ একটি চতুর্ভুজের ভূমি ১৪ সে. মি. এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ (ক) 60° (খ) 30° (গ) 45° প্রতি ক্ষেত্রে চতুভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র আঁকতে হবে।

সমস্যা নং ৪.১৪	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্র আঁকতে হবে।

[অঙ্কন সংকেত ঃ

১। যেকোন ABCD বর্গক্ষেত্র নাও এবং AB বাহুকে E পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন AB = BE হয়।

২। A ও F কে কেন্দ্র করে AE সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ আঁক যেন তারা F বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। AF ও EF যোগ কর যেন AF রেখা DC কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। AH ও AF এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর। মনে কর, তাদের মধ্য সমানুপাতী d; তাহলে, d^2 = AH. AF

৫। AF থেকে d এর সমান AP অংশ কেটে নাও এবং EF এর সমান্তরাল PQ রেখা আঁক যেন তা AE কে Q বিন্দুতে ছেদ করে

তাহলে, APQ -ই নির্ণেয় ত্রিভুজক্ষেত্র।]

সমস্যা নং ৪.১৫	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ এরূপ সমবাহু ত্রিভুজ আঁকতে হবে, যে ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (ক) 12.7 সে. মি. (খ) 13.5 সে. মি. (গ) 15 সে. মি. (ঘ) 4.6 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। (চারটি ভিন্ন সমস্যা বিবেচ্য)

সমস্যা নং ৪.১৬	তারিখ :

সমস্যা ঃ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ দেওয়া আছে এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

উপকরণ ঃ পেন্সিল, কম্পাস, স্কেল ইত্যাদি।

অঙ্কন ঃ

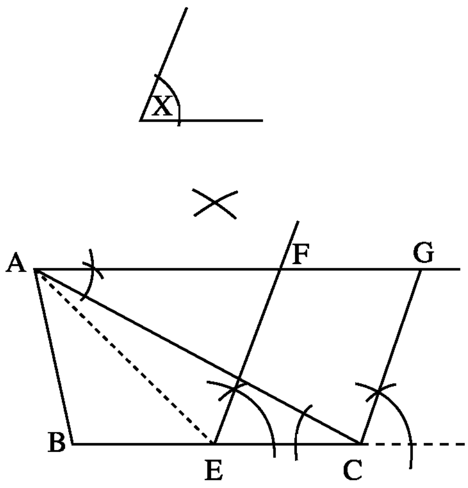
১। যেকোন ABC ত্রিভুজ নাও।

২। BC কে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

৩। E বিন্দুতে $\angle CEF = \angle X$ আঁকি।

৪। A বিন্দু দিয়ে BC এর সমান্তরাল AFG রেখাংশ আঁক যেন তা EF কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

৫। C বিন্দুতে EF এর সমান্তরাল CG সরলরেখা আঁক যেন তা AFG রেখাংশকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ECGF নির্ণেয় সামান্তরিক।



চিত্র ঃ ১৯

প্রমাণ ঃ AE যোগ করি।

∴ ABE ও ACE ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

∴ $\triangle$ ক্ষেত্র ABC = 2 $\triangle$ ক্ষেত্র AEC

∴ ECGF সামান্তরিক = 2 $\triangle$ ক্ষেত্র AEC

∴ $\triangle$ ক্ষেত্র ABC = ECGF সামান্তরিক ক্ষেত্র।

আবার অঙ্কনানুসারে $\angle CEF = \angle D$

∴ ECGF -ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সমস্যা নং ৪.১৭	তারিখ :

নিম্নোক্ত তথ্য অবলম্বনে অঙ্কন করতে হবে।

১। একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ 60^{o} এবং যার অভ্যন্তর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 15.6^{o} সে. মি. ভুমি ও 8.3^{o} সে. মি. উচ্চতা বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

২। একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ 30^{o} এবং যার অভ্যন্তর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 5 সে. মি., 6 সে.মি. ও 7 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

৩। একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোন 75^{o} এবং যার অভ্যন্তর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 14 সে.মি. ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 20^{o} এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 16 সে.মি।

সমস্যা নং ৪.১৮	তারিখ :

সমস্যা ঃ কোন ট্রাপিজিয়ামের দুইটি সমান্তরাল বাহু a, b এবং বৃহত্তর সমান্তরাল বাহু a সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন সংকেত ঃ

১। যে কোন BC (= a) রেখাংশ নাও।

২। BC রেখাংশের B ও C প্রান্তে পথাক্রমে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান $\angle CBM$ এবং $\angle BCN$ আঁক।

৩। BM ও CN মনে কর P বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দুতে ॥ PQ BC আঁক।

৪। PQ হতে PR (= b) অংশ কেটে নাও।

৫। R বিন্দুতে BM এর সমান্তরাল RD আঁক যেন তা CN কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

৬। D বিন্দুতে C এর সমান্তরাল DA আঁক যেন তা BM কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ABCD-ই নির্ণেয় ট্রাপিজিয়াম।]

সমস্যা নং ৪.১৯	তারিখ :

সমস্যা ঃ নিম্নোক্ত তথ্য অবলম্বনে ট্রাপিজিয়াম আঁকতে হবে।

১। সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 5.6 সে. মি., 8.5 সে. মি. এবং বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন কোণদ্বয় 30° ও 60°

২। সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 7.0 সে. মি., 5.0 সে. মি. এবং বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন কোনদ্বয় 60° ও 30°

সমস্যা নং ৪.২০	তারিখ :

সমস্যা ঃ এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ $\angle x$ ও একটি বাহু d দেওয়া আছে এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের সমান।

[**অঙ্কন সংকেত ঃ**

১। যেকোন ABC ত্রিভুজ নিয়ে BC থেকে BE = 2d অংশ কেটে নাও; প্রয়োজনে BC কে বর্ধিত করে নিতে হবে।

২। BE এর উপর এরূপ PBE ত্রিভুজ আঁক যেন $\angle CBP = \angle x$ হয় এবং $\triangle$ - ক্ষেত্র PBE = $\triangle$-ক্ষেত্র ABC হয়।

৩। $\triangle$ -ক্ষেত্র PBE এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট EDGH সামান্তরিক ক্ষেত্র আঁক।

তাহলে, EDGH সামান্তরিকই নির্ণেয় সামান্তরিক।]

সমস্যা নং ৪.২১	তারিখ :

সমস্যা ঃ সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ 30^o, একটি বাহু 4.2 সে. মি. এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নিম্নোক্ত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

(ক) 8.5 সে. মি., 6 সে. মি., 7 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ ক্ষেত্র।

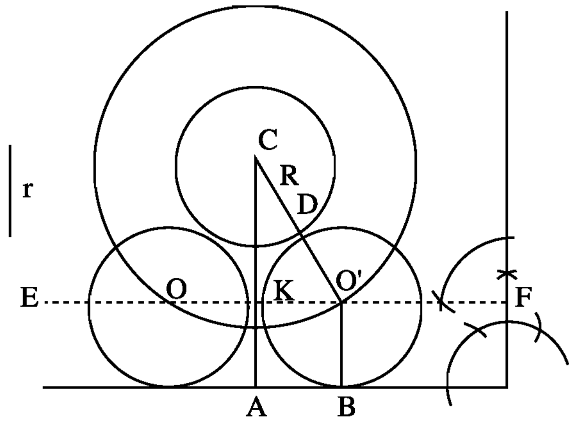
(খ) ভূমি 4.2 সে. মি., এং 2.3 সে. মি. উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজ ক্ষেত্র

(গ) ভূমি 14 সে. মি., ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর 20^o এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 16 সে. মি. বিশিষ্ট ত্রিভুজ ক্ষেত্র। (তিনটি ভিন্ন সমস্যা বিবেচ্য)।

সমস্যা নং ৪.২২	তারিখ :

সমস্যা ঃ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যার ব্যাসার্ধ r দেওয়া আছে এবং যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেকাকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন ঃ পেন্সিল, কমপাস, স্কেল ইত্যাদি।



১। যে কোন AB সরলরেখা নিই এবং AB থেকে r একক দূরে EF।। AB আঁকি। নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র EF এর উপর থাকবে।

২। নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C নিই এবং মনে করি এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ R; C -কে কেন্দ্র করে R ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এটাই প্রদত্ত নির্দিষ্ট বৃত্ত।

৩। C কে কেন্দ্র করে $R + r$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি এককেন্দ্রিক বৃত্ত আঁকি। যেন তা EF- কে O এবং O' বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। O এবং O' কে কেন্দ্র করে r সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, ঐ বৃত্তদ্বয় প্রত্যেকেই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ C, B যোগ করি। যেহেতু $AC \perp AB$ এবং $KO \parallel AB$ এবং $KA = OB = r$

$\therefore$ KABO' একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore OB \perp AB$

সুতরাং নির্ণেয় বৃত্ত AB কে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। আবার $CO = CD + r$ এবং C, D, O একই সরলরেখায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে। একই বাবে দেকানো যায় যে O' কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি ও নির্দিষ্ট বৃত্ত ও নিদিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

সমস্যা নং ৪.২৩	তারিখ :

১। ৩ সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ বৃত্ত আঁকতে হবে যা ৫ সে. মি. ব্যাসার্ধবিষ্টি কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে ও একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

২। ২.৫ সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ বৃত্ত আঁকতে হবে যা ৩.৭ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নির্দিস্ট বৃত্তকে ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

৩। ১.৮ সে.মি. ব্যাসার্ধবিষ্টি এরূপ বৃত্ত আঁকতে হবে যা ২.৩ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

সমস্যা নং ৪.২৪	তারিখ :

সমস্যা ঃ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা একটি প্রদত্ত বৃত্তের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন সংকেত ঃ

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট যে কোন বৃত্ত আঁক এবং তার পরিধিস্থ যে কোন A বিন্দু নাও।

২। C কেন্দ্রবিশিষ্ট অপর একটি বৃত্ত আঁক।

৩। OA যোগ করে তাকে P পর্যন্ত বর্ধিত কর।

৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের A বিন্দুতে AX স্পর্শক আঁক।

৫। C হতে AX এর উপর CD লম্ব আঁক যেন তা AX কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

৬। DC বর্ধিত কর যেন তা C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। QA যোগ কর যেন তা একই বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

৭। CR যোগ করে বর্ধিত কর যেন তা বর্ধিত PA - কে S বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে S নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

৮। S কে কেন্দ্র করে SA বা SR ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।]

সমস্যা নং ৪.২৪	তারিখ :

সমস্যা ঃ এরুপ একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা একটি সরলরেখাকে এবং প্রদত্ত একটি বৃত্তকে তার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

অঙ্কন সংকেত ঃ

১। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা AB নাও এবং দির্দিষ্ট O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত আঁক যার পরিধিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু P.

২। AB এর উপর OX লম্ব আঁক এবং OX কে বর্ধিত কর যেন তা নির্দিষ্ট বৃত্তকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। RP ও PS যোগ করে বর্ধিত কর যেন তারা AB কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। AB এর উপর EH ও FK লম্ব আঁক এবং OP যোগ করে তাকে বর্ধিত কর যেন তা EH ও FK রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে H, K বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র H অথবা K এবং ব্যাসার্ধ HP অথবা KP.

৫। H এবং K কে কেন্দ্র করে HP এবং KP ব্যাসার্ধ দুইটি বৃত্ত আঁকলে তারা প্রত্যেকেই নির্ণেয় বৃত্ত হবে।

সমস্যা নং ৪.২৬	**তারিখ :**

১। AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং AB হতে 4 সে. মি. দূরে 3 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ দুইটি বৃত্ত আঁকতে হবে যারা প্রদত্ত বৃত্তকে P বিন্দুকে স্পর্শ করে এবং AB রেখাকেও স্পর্শ করে।

২। ১নং প্রশ্নের সকল শর্তাধীনে প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ (ক) 2.5 সে. মি. (খ) 2.0 সে. মি. (গ) 1.5 সে. মি. ধরে বৃত্ত আঁকতে হবে।

৩। ১নং প্রশ্নের সকল শর্তাধীনে কেবলমাত্র AB রেখা হতে (ক) 3.0 সে.মি (খ) 3.7 সে.মি. দূরে ধরে বৃত্ত আঁকতে হবে।

সমস্যা নং ৪.২৭	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং একটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন সংকেত ঃ

১। যে কোন CDE বৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের বহিঃস্থ দুইটি বিন্দু A, B নাও।

২। A, B বিন্দু দিয়ে এমন একটি বৃত্ত আঁক যা CDE বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। CD ও AB কে যোগ করে বর্ধিত কর যেন তারা X বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। X হতে DCE বৃত্তে XE স্পর্শক আঁক।

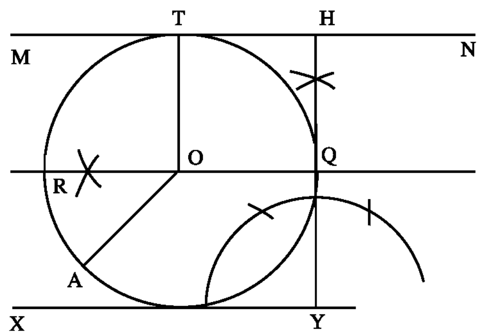
তাহলে, A, B, E বিন্দুগামী বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

সমস্যা নং ৪.২৮	তারিখ :

এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা (ক) 4 সে. মি. (খ) 2.5 সে. মি. (গ) 3.5 সে.মি. ব্যাসার্ধশিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করবে এবং ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ দুইটি বিন্দু দিয়ে যাবে।

সমস্যা নং ৪.২৯	তারিখ :

এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা দুইটি সমান্তরাল সরলরোখার প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে এবং তাদের মধ্যবর্তী কোন বিন্দু দিয়ে যায়।



অঙ্কন

১। MN ও XY দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাংশ নিই এবং মনে করি তাদের মধ্যবর্তী A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

২। XY রেখাংশের Y বিন্দুতে HY⊥ XY আঁকি যেন তা MN কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। YH এর লম্ব-দ্বিখন্ডক QR আঁকি যেন তা YH কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে QY ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন QR কে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, O বিন্দুই নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

৫। O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ OA যোগ করি এবং O বিন্দু দিয়ে YH এর সমান্তরাল OT রেখাংশ আঁকি যেন তা MN কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু OT ॥ QH এবং OQ ॥ TH

∴ TOQH একটি সামান্তরিক।

∴ OT = QH = QY = OA.

এবং $\angle$OTH = $\angle$OQH = এক সমকোণ।

∴ OT একটি ব্যাসার্ধ এবং MN একটি স্পর্শক।

∴ বৃত্তটি MN রেখাংশকে স্পর্শ করে এবং A বিন্দু দিয়ে যায়।

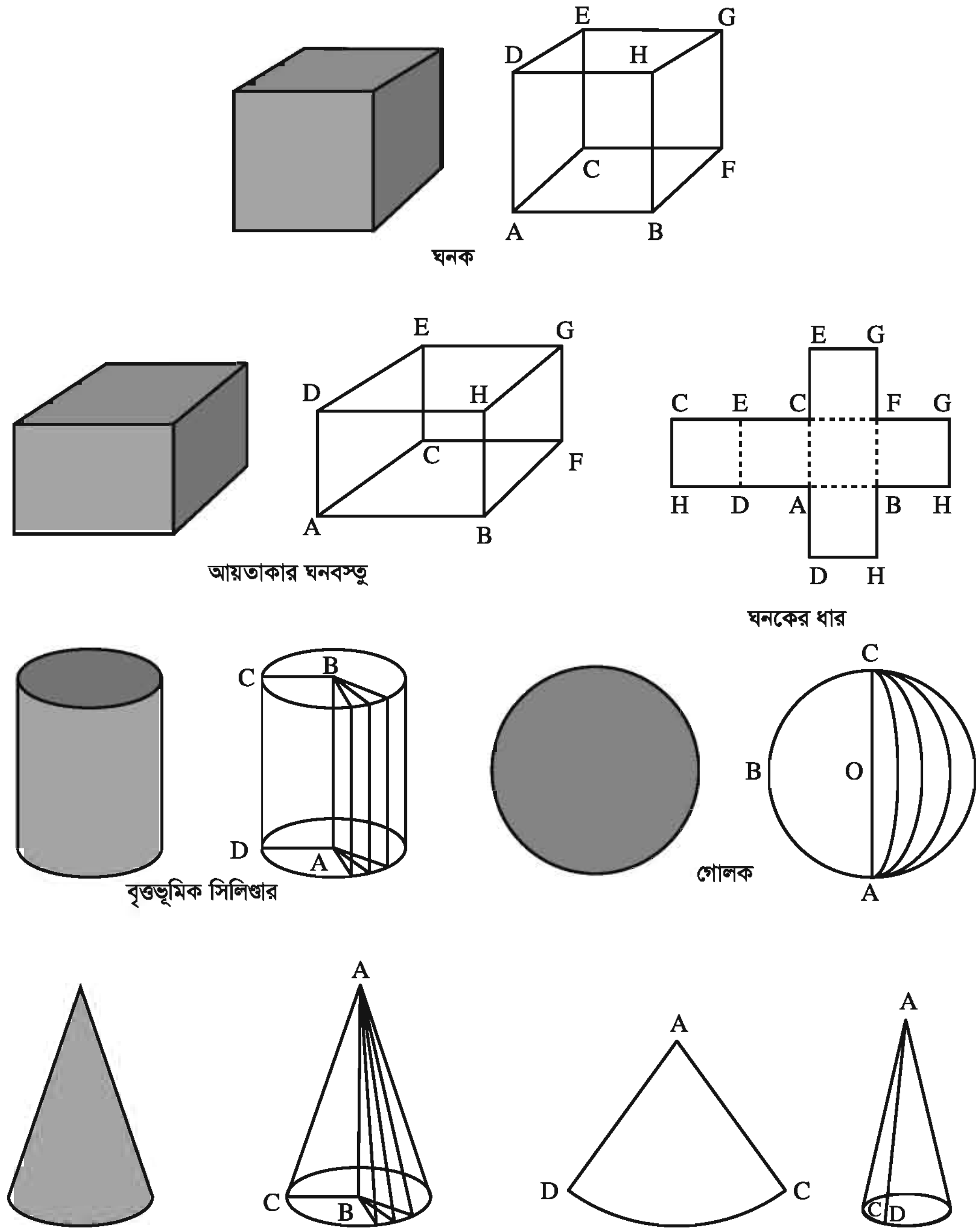
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, বৃত্তটি XY রেখাংশকে স্পর্শ করে।

∴ AQT বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

পঞ্চম অধ্যায়

পরিমিতি

৫.১। অঙ্কনের সুবিধার্থে মডেল হিসেবে কয়েকটি ঘনবস্তুর চিত্র নিম্নে দেওয়া হল।



চিত্র ঃ ২২

সমস্যা নং ৫.১	তারিখ :

নিম্নলিখিত ঘনবস্তুর চিত্র অঙ্কন ও মডেল তৈরি কর ঃ

(ক) ঘনক, (খ) আয়তাকার ঘনবস্তু, (গ) সিলিন্ডার (ঘ) গোলক, (ঙ) কোণক, (চ) পিরামিড।

৫.২। সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রাবলি ঃ

(ক) ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রাবলি ঃ

(ক) ত্রিভুজ ক্ষেত্রের কেক্ষত্রফল $\sqrt{s\ (s - a)\ (s - b)\ (s - c)}$ বর্গএকক, যেখানে ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c এবং $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ আবার ভূমির দৈর্ঘ্য a ও উচ্চতা h হলে, ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ ah বর্গ একক।

(খ) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য x প্রস্থ বর্গ একক।

(গ) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য)^2 বর্গ একক।

(ঘ) সামান্তরিক ক্ষেত্রফল = ভূমি x উচ্চতা বর্গ একক।

(ঙ) রম্বস ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ x কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল বর্গ একক।

(চ) ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি x উচ্চতা) বর্গ একক।

সমস্যা নং ৫.১	তারিখ :

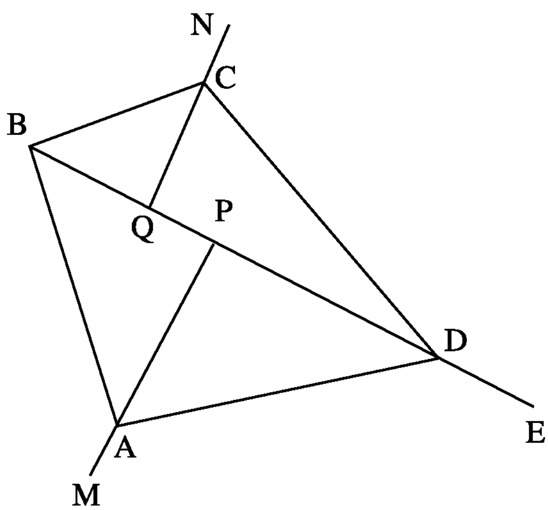
সমস্যা ঃ ABCD চতুর্ভুজাকার একটি মাঠের BD কর্ণের দৈর্ঘ্য 135 মিটার এবং A, C শীর্ষবিন্দুদ্বয় হতে BD এর উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 63 মিটার ও 37 মিটার। B বিন্দু হতে লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে 67 মিটার ও 32 মিটার। মাঠটির একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে এবং মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (কর্নের দৈর্ঘ্য) (অপর দুই শীর্ষ বিন্দু থেকে কর্ণের দূরত্বের সমষ্টি)।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ পেন্সিল, স্কেল

অঙ্কন ঃ

১। 1 সে.মি. = 20 মিটার স্কেল নিয়ে কর্নের ও লম্বদ্বয়ের আনুপাতিক দৈর্ঘ্য দাঁড়ায় যথাক্রমে 6.76 সে.মি., 3.15 সে.মি., এবং 1.85 সে.মি. লম্বের পাদবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব (B বিন্দু হতে) দাঁড়ায় যথাক্রমে 3.35 সে.মি. এবং 1.6 সে.মি.।



২। স্কেলের সাহায্যে $d = 6.75$ সে.মি, $i = 3.15$ সে. মি, $m = 1.35$ সে.মি. $p = 3.35$ সে. মি. এবং $q = 1.6$ সে.মি. দীর্ঘ পাঁচটি রেখাংশ টানি।

৩। যথেষ্ট (7 সে.মি বা তদূর্ধ) দীর্ঘ একটি রেখাংশ BE নিয়ে তা থেকে $BD = d$, $BP = p$ এবং $BG = q$ কেটে নেই।

৪। P বিন্দুতে BD এর উপর লম্ব PM এবং Q বিন্দুতে BD এর উপর PM এর বিপরীত দিকে লম্ব QN আঁকি। PM থেকে $PA = 1$ এবং QN থেকে $QC = m$ কেটে নিই।

৫। A, B; A, D; C, B এবং C,D যোগ করি, তাহলে প্রাপ্ত ABCD চতুর্ভুজটি হবে প্রদত্ত মাঠের আনুপাতিক চিত্র।

ফল সংকলন ঃ

ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \triangle BAD$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle BCD$ এর ক্ষেত্রফল।

$= \frac{1}{2}\ BD.\ PA + \frac{1}{2} BD.\ QC$

$= \frac{1}{2}\ BD.\ (PA + QC)$

$= \frac{1}{2} \times 135 \times (63 + 37)$ বর্গমিটার

$= \frac{1}{2} \times 135 \times 100$ ব. মি $= 6750$ বর্গমিটার

সমস্যা নং ৫.৩	**তারিখ :**

১। আয়তাকার একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 67 মি. ও প্রস্থ 48 মি. বাগানের ভিতরে চারদিকে 2 মি. প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাসহ বাগানটির একটি চিত্র আঁকতে হবে এবং রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

২। ABCDE একটি পঞ্চভুজ ক্ষেত্র। AC ও AD বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যতাক্রমে 125 মি. ও 105 মি.। আবার E থেকে AD এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য 45 মি. এবং B ও D থেকে AC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 35 মি. ও 30 মি.। পঞ্চভুজক্ষেত্রটির আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

৩। ABCD একটি চতুর্ভুজ ক্ষেত্র যার ভূমি $AB = 95$ মি. C ও D থেকে AB এর উপর লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যতাক্রমে 35 মি. ও 45 মি. এবং লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু X ও Y দ্বারা AB ভূমি $AX = 32$ মি., $XY = 35$ মি. এবং $YB = 28$ মি. দীর্ঘ তিন অংশ বিভক্ত হয়েছে। ক্ষেত্রটির আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

৫.৩। ঘনবস্তুর পরিমিতি

(ক) কোন আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ উচ্চতা যথাক্রমে a, b. c একক হলে, তার আয়তন = abc ঘন একক।

সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 2(ab + bc + ca) বর্গ একক।

কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক।

সমস্যা নং ৫.৪	**তারিখ :**

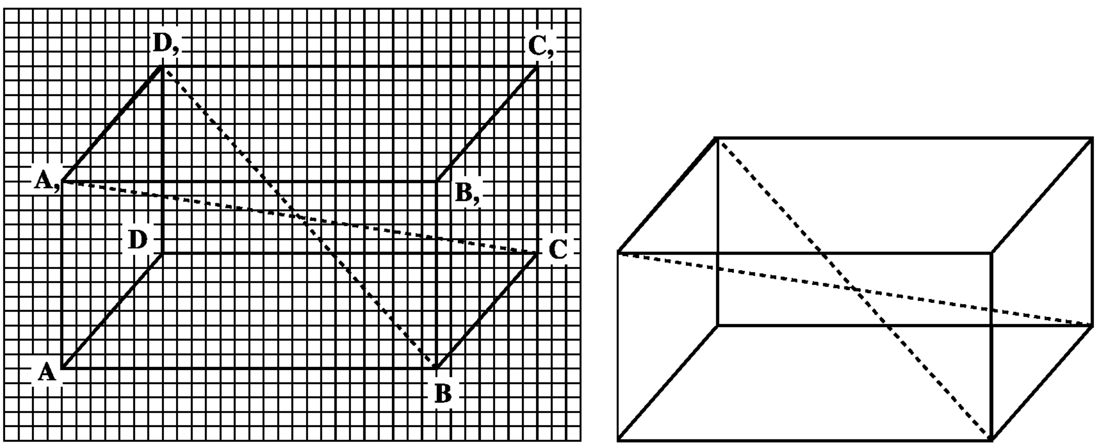
সমস্যা ঃ একটি আয়তাকার কাষ্ঠখন্ডের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 0.52 মিটার, 0.21 মিটার এবং 0.26 মিটার। এর একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে এবং এর আয়তন, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ কাষ্ঠখন্ডের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা a, b, c ধরি।

তাহলে, আয়তন = abc ঘন একক,

কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক।

সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 2(ab + bc + ca) বর্গ একক।



চিত্র ঃ ২৪

অঙ্কন ঃ

১। একটি গ্রাফ কাগজ নিই এবং এর 1 ক্ষুদ্রতম ঘরের দৈর্ঘ্য = .02 মি. স্কেল ধরি।

২। উপরিউক্ত স্কেলে প্রদত্ত কাষ্ঠখন্ডের দৈর্ঘ্য = 26 একক প্রস্থ = 10.5 একক, উচ্চতা = 13 একক নির্ণয় করি।

৩। গ্রাফ কাগজে AB = 26 ঘর এবং AD = 10.5 ঘর নিয়ে একটি ABCD সামান্তরিক আঁকি।

৪। A, B, C, D প্রত্যেকটি বিন্দুতে 13 ঘর দীর্ঘ AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 লম্ব আঁকি।

৫। A_1, B_1, B_1, C_1, C_1, D_1, D_1 A_1 যোগ করি। তাহলে, প্রদত্ত কাষ্ঠখন্ডের আনুপাতিক চিত্র আঁকা হল যার দুইটি সমান্তরাল পৃষ্ঠ ABCD এবং $A_1 B_1 C_1 D_1$.

৬। BD_1ও CA_1 যোগ করি। তাহলে, দুইটি কর্ণ। তাহলে, দুইটি কর্ণ BD_1 ও CA_1 দ্বারা সূচিত হবে।

ফল সংকলন ঃ

আয়তন = .52 x .21 x .26 ঘ.মি. = 0.0284 ঘন মিটার।

সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 2 (.52 x .21 + .21 + .21 x .26 + .52 x .26) =0.098 বগ মিটার।

কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(0.52)^2 + (0.21)^2 + (0.26)^2}$ মিটার = 0.6181

সমস্যা নং ৫.৫	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ

১। একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 3.5 মিটার, 2.5 মিটার এবং 2.00 মিটার। বাক্সের তক্তা 2.5 সে.মি পুরু। বাক্সটির একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে। বাক্সটি তৈরি করতে কি পরিমাণ কাঠ লাগবে তা নির্ণয় করতে হবে। বাক্সটির বাইরের দিকের সকল ধার পালিশ করতে প্রতি বর্গমিটার টাঃ 155.87 খরচ হলে, মোট খরচ কত হবে তাও নির্ণয় করতে হবে।

২। একটি গনকের সমগ্র তলের 588 ব. মি. । ঘনকটির একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে এবং কর্ণ মেপে তোমার অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

৩। এরূপ একটি আয়তাকার ঘনবস্তু আঁকতে হবে যার কর্ণের দৈর্ঘ্য 14.9666 মি. এবং দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতার অনুপাত 3 ঃ 2 ঃ 1 । এই ঘনবস্তুটির দিকে সকল পাশে 1.5 সে. মি. পুরু লোহার পাত লাগাতে কি পরিমাণ লাগবে তাও নির্ণয় করতে হবে।

সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার (Right circular cylinder)

সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হলে, তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi rh$ বর্গএকক।

ভূমির ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ একক।

আয়তন = $\pi r^2 h$ ঘনএকক

সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $(2\pi r^2 + 2\pi rh)$ বর্গএকক।

= $2\pi r (r + h)$ বর্গএকক।

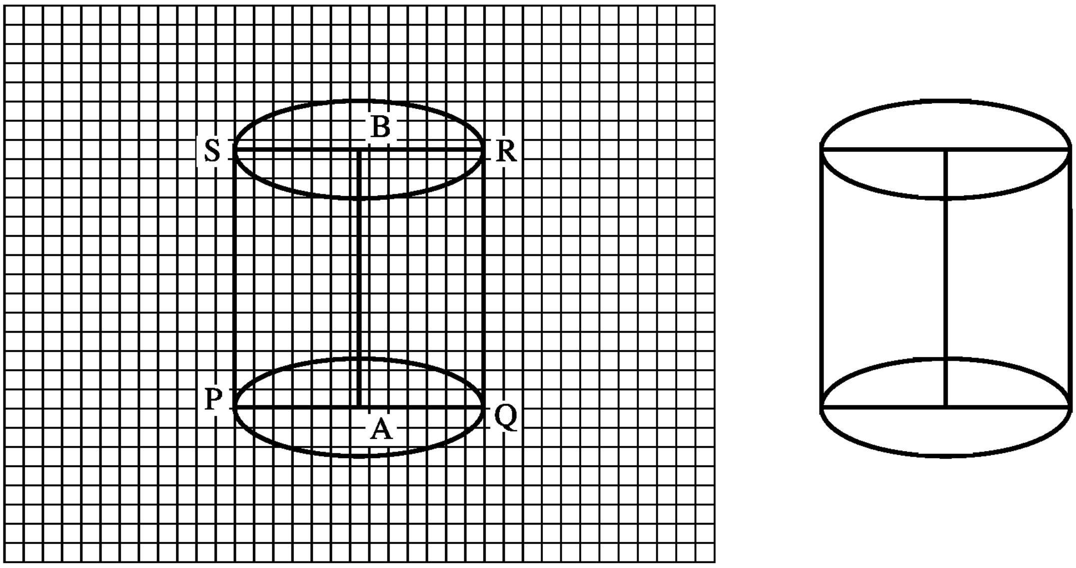
সমস্যা নং ৫.৬	**তারিখ :**

সমস্যা : একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ 55 সে.মি. এবং উচ্চতা 135 সে.মি.। এর একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে এবং এর আয়তন ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হলে, সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= (2\pi r^2 + 2\pi rh)$ বর্গ একক $= 2\pi r\,(r+h)$ বর্গ একক।

আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক।



চিত্রে : ২৫

অঙ্কন ঃ

১। যেএকটি গ্রাফ কাগজ নিই এবং 1 ক্ষুদ্রতম ঘরের দৈর্ঘ্য = 10 সে. মি. স্কেল ধরি।

২। ঐ ক্ষেত্রে প্রদত্ত সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ 55 সে.মি. = 5.5 ঘর এবং উচ্চতা 135 সে.মি. = 13.5 ঘর ধরে AB রেখাংশের A বিন্দু থেকে দুই দিকে 5.5 সে.মি. নিই এবং বিন্দু চিহ্নিত করি। মনে করি বিন্দুদ্বয় P ও Q.

৩। P ও Q বিন্দু হতে 13.5 সে.মি. উপরের দিকে গিয়ে S ও R বিন্দু চিহ্নিত করি।

৪ P, Q এবং S, R যোগ করি। PQ ও SR কে বৃহৎ A ধরে দুইট উপবৃত্ত আঁকি যাদের কেন্দ্র A এবং B.

৫। A, B যোগ করি। তাহলে, AP বা AQ প্রদত্ত সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ এবং AB তার উচ্চতা সূচিত করে। PQRS-ই সিলিন্ডারের আনুপাতিক চিত্র।

ফল সংকলন ঃ

প্রদত্ত সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $r = 55$ সে.মি. এবং উচ্চতা $h = 135$ সে.মি

$\therefore r = .55$ মিটার এবং $h = 1.35$ মিটার।

সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \pi \times .55 (.55 + 1.35)$ বর্গমিটার $= 6.5659$ বর্গ মিটার।

আয়তন $= (.55)^2 \times 1.35$ ঘনমিটার $= 1.2829$ ঘনমিটার।

মন্তব্য ঃ ত্রিমাত্রিক জগতে একটি বৃত্তকে তীর্যকভাবে দেখলে তাকে উপবৃত্ত বলে মনে হয়। সেজন্য সিলিন্ডারটির উপর ও নিচের তলগুলোকে উপবৃত্তকার আঁকা হয়েছে। প্রকৃত পক্ষের এগুলো বৃত্তাকার।

সমস্যা নং ৫.৭	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ

১। 4.5 মিটার ধারবিশিষ্ট একটি পানির ট্যাংক পানি পূর্ণ অবস্থায় আছে। ঐ ট্যাংকের সবটুকু পানি একটি বৃত্তভূমিক সিলিন্ডারকৃতির ড্রামে রাখতে হবে। ড্রামের ভূমির ব্যাসার্ধ 2.5 মি. হলে তার উচ্চতার নির্ণয় করতে হবে। ট্যাং ও ড্রামের আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে।

২। 13 সে.মি. উচ্চতা ও 6.2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি নিরেট সিলিন্ডার গলিয়ে একটি নিরেট ঘনক তৈরি করা হল। গলন প্রক্রিয়ায় এক শতাংশ পদার্থ কমে গেলে ঘনকের ধার কত হবে তা নির্ণয় করতে হবে। সিলিন্ডার ও ঘনকের আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে।

সমবৃত্তভূমিক কোণক (Right Circular cone) ঃ

সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হলে, তার

হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক।

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$ বর্গ একক।

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= (\pi rl + \pi r^2)$ বর্গ একক $= \pi\ r (l + r)$ বর্গ একক।

আয়তন $= \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$ ঘন একক।

সমস্যা নং ৫.৮	**তারিখ :**

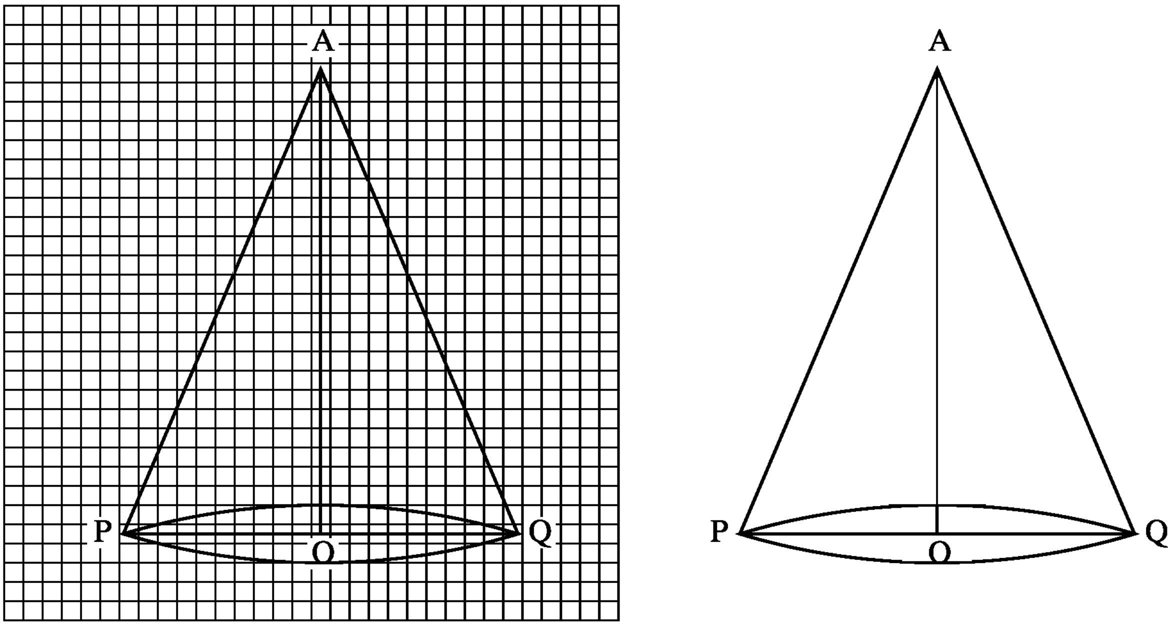
সমস্যা ঃ একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ 3.3 মি. এবং উচ্চতা 8.4 মি.। কোণকটির আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে। তার হেলানো উচ্চতা নির্ণয় করে তোমার অঙ্কিত চিত্রের যথার্থতা যাচাই করতে হবে। কোণকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফর ও আয়তন নির্ণয় করতে হবে।

সমস্যা নং ৫.৬	তারিখ :

তত্ত্ব ঃ হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$

আয়তন $= \frac{1}{3} \pi r^2 h.$



চিত্র : ২৬

অঙ্কন ঃ

১। একটি গ্রাফ কাগজ নিই। প্রদত্ত কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা যথাক্রমে 3.3 মি. এবং 8.4 মি. বিধায় .3 মি. কে একক ধরি।

২। এক ঘর = .3 মি. স্কেল ধরি। তাহলে, ভূমির ব্যাসার্ধ 11 ঘরের সমান ও উচ্চতা 28 ঘরের সমান।

৩। 22 ঘর দীর্ঘ PQ রেখাংশ নিই এবং তাকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করি।

৪ O বিন্দুতে PQ এর উপর লম্ব 28 বর্গ দীর্ঘ OA রেখাংশ আঁকি এবং A, P ও A, Q যোগ করি।

৫। PQ কে বৃহৎ A ধরে একটি উপবৃত্ত আঁকি। তাহলে, APQ নির্ণেয় কোণকের আনুপাতিক চিত্র হবে। OA রেখাকে কোণকের উচ্চতা বা অক্ষও বলা হয়। AP রেখা কোণকের হেলানো উচ্চতা।

ফল সংকলন ঃ

$r = 3.3$ মিটার, উচ্চতা $= 8.4$ মিটার

$\therefore l = \sqrt{(3.3)^2 + (8.4)^2} = 9.025$ মিটার

বক্রতলের ক্ষেত্রফল = π x 3.3 x 9.0250 বর্গ মিটার = 93.5645 বর্গ মিটার ।

আয়তন = 13 x π x $(3.3)^2$ x 8.4 ঘন মি. = 95.7934 ঘনমিটার ।

অঙ্কনের সত্যতা যাচাই ঃ

প্রকৃত মাপে AP = 30 ঘর = 30 x .3 মিটার = 9.0 মিটার

উপরিউক্ত ফল সংকলনে AP = ℓ = 9.0250 মিটার।

সুতরাং অঙ্কন ও সূত্র প্রয়োগ ℓ এর মান নির্ণয়ে প্রাপ্ত আসন্ন মান কাছাকাছি। তাই অঙ্কন যথার্থ হয়েছে।

সমস্যা নং ৫.৯	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ যে সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ 18 মিটার এবং উচ্চতা 22 মিটার, তার একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে। এই কোণকের বক্রতলের সমান বক্রতল বিশিষ্ট বৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে। কোণকটি নিরেট এবং সীসানির্মিত হলে একে গলিয়ে যে নিরেট ঘনক তৈরি করা যাবে তার আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে। (গলন প্রক্রিয়ার এক শতাংশ সীসায় হয়ে যায় ধরতে হবে)।

গোলক

গোলকের ব্যাসার্ধ r হলে, তার

(i) আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

(ii) বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $4\pi r^2$ বর্গ একক।

(iii) কেন্দ্র থেকে $h(h < r)$ দূরত্বে সমতলচ্ছেদের ফলে উৎপন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $\sqrt{r^2 - h^2}$ একক।

সমস্যা নং ৫.১০	**তারিখ :**

সমস্যা ঃ 34 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র হতে 10.5 মিটার দূরে সমতলচ্ছেদের ফলে একটি বৃত্ত উৎপন্ন হয়েছে। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করে চিত্রের ব্যাসার্ধের সত্যতা যাচাই করতে হবে। গোলকটি সীসা নির্মিত নিরেট গোলক এবং এক গলিয়ে ছোট সমান আকারের তিনটি গোলক নির্মিত হলে নতুন একটি গোলকের আনুপাতিক চিত্র আঁকতে হবে। (গলন প্রক্রিয়ায় এক শতাংশ সীসায় প্রাপ্ত হয় ধরতে হবে)।

তত্ত্ব ঃ ব্যাসার্ধ = r হলে, আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ এবং সমতলচ্ছেদে উৎপন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $\sqrt{r^2 - h^2}$, যেখানে কেন্দ্র থেকে তলের দূরত্ব = h.

অংকন :

১। একটি গ্রাফ কাগজ নিই এবং 1 ক্ষুদ্রতম ঘরের দৈর্ঘ্য = 1 মিটার স্কেল ধরি।

২। গোলকের ব্যাস = 34 মি.। তাই 34 মি. দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সরলরেখা নিই।

৩। AB কে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত আঁকি যার কেন্দ্র মনে করি O।

৪। O বিন্দু থেকে 10.5 মি. একক দূরে N বিন্দু নিয়ে ON যোগ করি।

৫। N বিন্দু দিয়ে ON এর সঙ্গে লম্ব একটি সমতল গোলকিট ছেদ করে এবং PQ ব্যাসবিশিস্ট বৃত্ত উৎপন্ন করে। এই বৃত্তের কেন্দ্র N। OP যোগ করি। পাশে প্রদর্শিত চিত্রই প্রদত্ত গোলকের আনুপাতিক চিত্র।

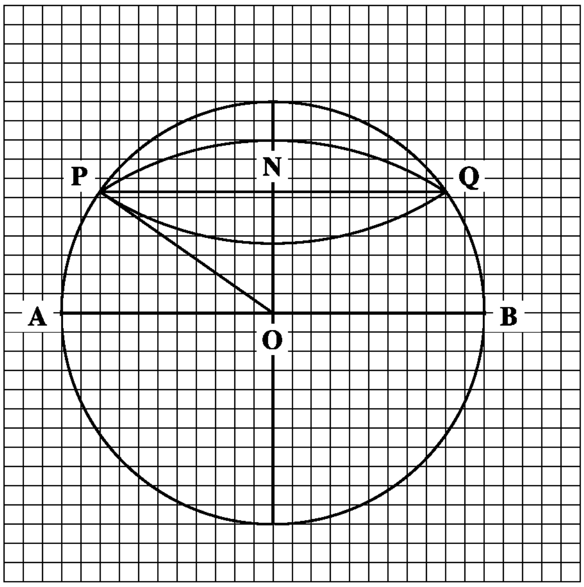
ফল সংকলন :

সমতলচ্ছেদ উৎপন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$= \sqrt{17^2 - (10.5)^2}$ মিটার

= 13.3697 মিটার।

চিত্রে PN = 13.3697 মি. এর সমান বলেই দেখা যায়। সুতরাং অঙ্কন যথার্থ।



চিত্রে : ২৭

শেষাংশ :

গোলকের সীসার আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(17)^3$ ঘন মিটার = 20579.5263 ঘনমিটার।

এক শতাংশ ক্ষয় হয়,

সুতরাং প্রাপ্ত সীসার আয়তন = (20579.6263 - 205.795263) ঘন মিটার

= 20373.7310 ঘনিমিটার।

নতুন যে তিনটি সমান আকারের গোলক তৈরি করা হল, তাদের প্রত্যেকের ব্যসার্ধ = r মিটার ধরি।

তাহলে, $3 \times \frac{4}{3}\pi\ r3 = 20373.7310$

বা, $r^3 = \frac{20373.7310}{4\pi} = 1621.29$

$\therefore\ r = 11.7477$ মিটার

গ্রাফ কাগজে 11.75 বর্গ একক ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলেই নতুন গোলকের আনুপাতিক চিত্র হবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়

ভেক্টর

সমস্যা নং ৬.১	তারিখ :

সমস্যা ঃ তিনটি এরূপ a_ b c ভেক্টর আঁকতে হবে যেন কোনটিই অপর কোনটির সমান্তরাল না হয়। অতঃপর a- 3 b+ 2c ভেক্টর আঁকতে হবে।

তত্ত্ব ঃ কোন u ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর v আঁকা হলে u + v দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু u এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু v এর প্রান্তবিন্দু।

কার্যপদ্ধতি ঃ

১। যেকোন দিকে যেকোন দৈর্ঘ্যের তিনটি ভেক্টর আঁকি যেন একটি অপরটির সমান্তরাল না হয়। মনে করি a, b, c ভেক্টরত্রয়ের দৈঘ্য যথাক্রমে 2, 2.5, 4 সে. মি.।

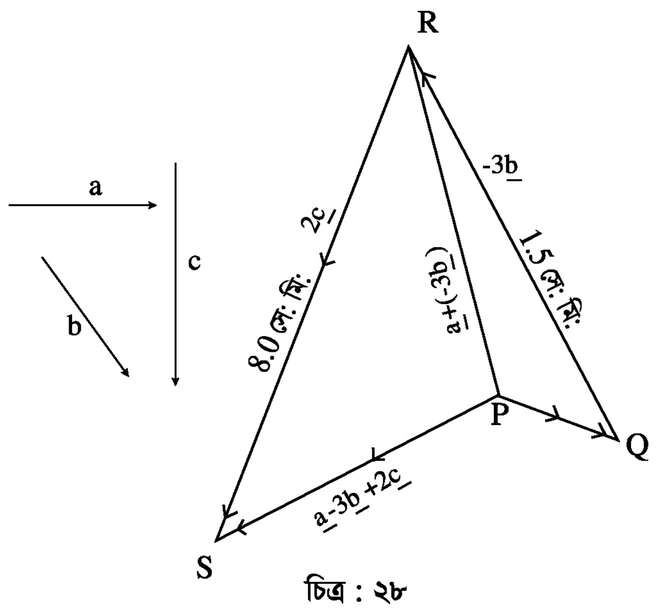
২। কোন নির্দিষ্ট P বিন্দু থেকে a এর সমান ও সমান্তরাল করে $a = \overrightarrow{PQ}$ একটি ভেক্টর আঁকি। a ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু Q থেকে b এর দিকের বিপরীত দিকে $QR = -3\overrightarrow{b}$ ভেক্টর আঁকি।

৩। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $a + (-3b) = \overrightarrow{PR}$ ভেক্টর পাই।

৪। R বিন্দু থেকে c এর সমান্তরাল $\overrightarrow{RS} = 2c$ আঁকি। এবার 2c এর প্রান্তবিন্দু S বিন্দুটি a এর আদিবিন্দু P এর সাথে যোগ করে $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টর পাই।

৫। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$ অর্থাৎ PS = a - 3 b + 2c ভেক্টর পাই।

অঙ্কন ঃ



চিত্র : ২৮

সমস্যা নং ৬.২	তারিখ :

সমস্যা ঃ একখানা উড়োজাহাজ কোন স্থান হতে পশ্চিম দিকে 200 কি. মি. যাওয়ার পর তার গতিপথের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ দিকে আরও 150 কি. মি. গেল। যাত্রাস্থল হতে উড়োজাহাজের শেষ অবস্থানের দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে। জ্যামিতিক পদ্ধতিতে অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

তত্ত্ব ঃ কোন $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্ত বিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

কার্য পদ্ধতি ঃ

১। একখন্ড গ্রাফ কাগজ নিই এবং গ্রাফ কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু = 10 কি. মি. ধরি। এটাই অঙ্কনের স্কেল হিসেবে গণ্য হবে।

২। কোন নির্দিষ্ট A বিন্দু হতে সোজা বামদিকে (যা পশ্চিম দিক হিসেবে গণ্য) 20 একক সমান AB রেখাংশ আঁকি।

৩। B বিন্দুতে উড়োজাহাজের গতি পথের দিক BA এর সাথে 120^0 কোণে BC = 15 একক আঁকি। BC রেখাংশ গ্রাফের কোন রেখার সমান্তরাল না হওয়ার BC এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্ণয়ের জন্য $\angle A'BC = 60^0$ আঁকি। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 15 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ BC কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। CA যোগ করে নির্ণেয় দূরত্ব পাওয়া গেল।

৫। AA' রেখা থেকে AC' = AC কেটে নিই; গ্রাফ পেপার হতে দেখি যে AC' = 30 ঘর (প্রায়)

$\therefore$ AC = 300 কি. মি. (প্রায়)

অঙ্কনের সত্যতা যাচাই ঃ

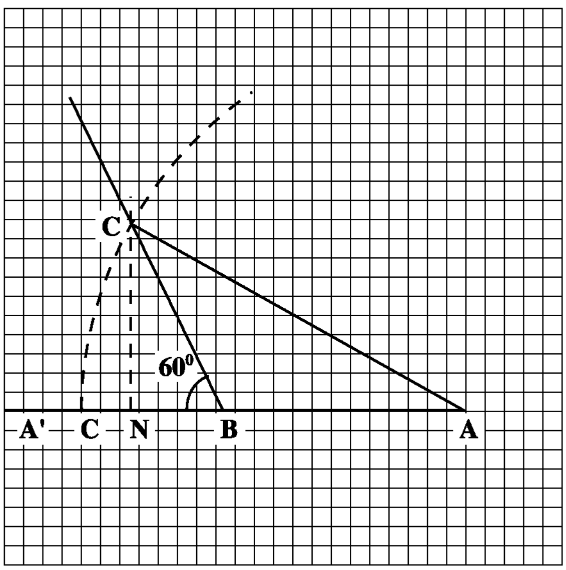
চিত্রে, AN = 27 একক

CN = 13 একক

$$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} \text{ একক}$$
$$= \sqrt{27^2 + 13^2} \text{ একক}$$
$$= 29.97 \text{ একক}$$
$$= 299.7 \text{ কি.মি.}$$

প্রকৃত মাপেও

AC, 300 কি. মি. অপেক্ষা কিঞ্চিৎ কম।



চিত্র : ২৯

সমস্যা নং ৬.৩	**তারিখ :**

(ক) যেকোন একটি $\underline{a}$ ভেক্টর এঁকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে (i) $2\underline{a}$ (ii) $-3\underline{a}$

(ii) $\underline{a}$ এর সাথে লম্বিত দিকে $2\underline{a}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি ভেক্টর আঁকতে হবে।

(খ) একে অপরের সমান্তরাল নয় এরূপ চারটি ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, এঁকে নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলো আঁকতে হবে ঃ

(i) $\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c}$ (i) $3\underline{c} - \frac{1}{2}(2\underline{a} - \underline{b})$

(ii) $3\underline{a} - 2\underline{b} + (\underline{c} - d)$ (ii) $\frac{1}{2}\underline{c} + \frac{2}{3}(\underline{a} - b + 2\underline{c})$

সমস্যা নং ৬.৪	**তারিখ :**

(ক) তিনটি ভেক্টরের মান ও দিক ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয় দ্বারা সূচিত। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যার বাহুগুলো দ্বারা $\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ভেক্টরগুলো সূচিত হবে।

(খ) এক ব্যক্তি মূলবিন্দু O থেকে OX (x অক্ষ) বরাবর ঘন্টায় 5 কি. মি. বেগে 3 ঘন্টা হাঁটার পর তার গতিবেগের দিকের সাথে 120^0 কোণে একই বেগে হাঁটা আরম্ভ করলেন। কতক্ষণ পরে তিনি O বিন্দু থেকে 25 কি. মি. দূরে অবস্থান করবেন তা নির্ণয় করতে হবে। জ্যামিতিক পদ্ধতিতে অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

সমস্যা নং ৬.৫	**তারিখ :**

(ক) এক ব্যক্তি কোন বিন্দু হতে সোজা পশ্চিম দিকে 40 মিটার যাওয়ার পর উত্তর দিকে 100 মিটার গেলেন এবং তারপর পূর্বদিকে 160 মিটার ও শেষে দক্ষিণ দিকে 30 মিটার গেলেন। এভাবে তিনি যে বিন্দুতে পৌঁছেন, যাত্রাবিন্দু থেকে তার দূরত্ব লৈখিক পদ্ধতি ও জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করতে হবে এবং অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

(খ) এক ব্যক্তি O মূল বিন্দু হতে Ox (x-অক্ষ) এবার 3 মিনিটে 330 মিটার হাঁটার পর তার গতিপথের সাথে 30^0 কোণে 100 মিটার/মিনিট বেগে হাঁটা শুরু করলেন। যাত্রারম্ভের সময় থেকে কতক্ষণ পরে তিনি যাত্রাবিন্দু থেকে 570 মিটার দূরে অবস্থান করবেন তা জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ও লৈখিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করতে হবে এবং জ্যামিতিক পদ্ধতিতে অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

সমস্যা নং ৬.৬	তারিখ :

সমস্যা : একে অপরের সমান্তরাল নয় চারটি ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, এঁকে $3\underline{a} - 2\underline{b} - (\underline{c} - \underline{d})$ ভেক্টরগুলো আঁকতে হবে।

তত্ত্ব : কোন $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : রাবার, সার্পনার, সরু করে কাটা একটি HB পেন্সিল, গ্রাফ পেপার, খাতা, কলম ইত্যাদি।

কার্য পদ্ধতি :

১। $3\underline{a} - 2\underline{b} - (\underline{c} - d-) = 3\underline{a} - 2\underline{b} - \underline{c} + \underline{d}$

২। যেকোন দিকে যেকোন দৈর্ঘ্যের ভেক্টর আঁকি যেন একটি অপরটির সমান্তরাল না হয়। মনে করি a, b, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$ ভেক্টরগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2 সে. মি. 2.5 সে. মি. ও 3 সে. মি. ও 3.5 সে. মি।

৩। যেকোন নির্দিষ্ট P বিন্দু থেকে $3\underline{a}$ এর সমান ও সমান্তরাল করে $3\underline{a} = \overrightarrow{PQ}$ একটি ভেক্টর আঁকি। $\overrightarrow{PQ}$ এর প্রান্ত বিন্দু Q থেকে B এর দিকের বিপরীত দিকে $\overrightarrow{QR} = 2\underline{b}$ ভেক্টর আঁকি।

৪ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $3\underline{a} + (-2b) = 3\underline{a} -2\underline{b} = PR$ ভেক্টর পাই।

৫। R বিন্দু থেকে c এর দিকের বিপরীত দিকে। $\overrightarrow{RS} = - \underline{c}$ আঁকি। এবার ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{R\underline{S}} = 3\underline{a} - 2\underline{b} - \underline{c} = \overrightarrow{PS}$ ভেক্টর পাই।

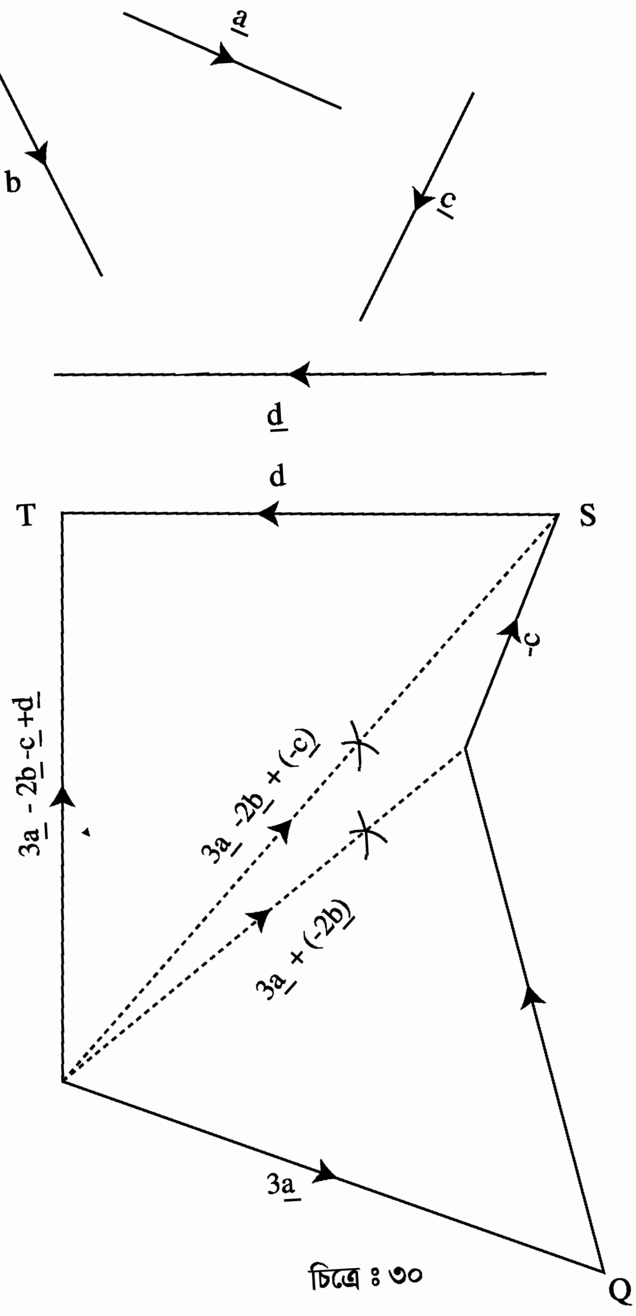
৬। $-\underline{c}$ এর প্রান্তবিন্দু S থেকে $\underline{d}$ এর সমান করে $\overrightarrow{ST} = \underline{d}$ আঁকি।

৭। $3\underline{a}$ ভেক্টরের আদি বিন্দু P এবং $\underline{d}$ এর প্রান্তবিন্দু T যোগ করে $\overrightarrow{PT}$ ভেক্টর পাই।

তাহলে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{PT} = 3\underline{a} - 2\underline{b} + (-\underline{c}) + \underline{d}$

$= 3a_ - 2\underline{b} - \underline{c} + \underline{d}$ ভেক্টর পাই।



চিত্রে ঃ ৩০

সতর্কতা : ১. মাপ ঠিকমত নিয়েছি।

২. সরু করে কাটা HB পেন্সিল দ্বারা এঁকেছি।

৩. কাগজের বিন্দুগুলো ঠিকমত যোগ করেছি।

২০১০ শিক্ষাবর্ষ

দেশকে ভালোবাসো, দেশের মঙ্গলের জন্য কাজ কর
– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

চিন্তা স্বচ্ছ আয়নার মত

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা বাংলাদেশ

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য